

# **UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**

**ESCUELA DE POSGRADO  
SECCIÓN DE CIENCIAS**



**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS, CON MENCIÓN EN  
MATEMÁTICA APLICADA**

## **TÍTULO**

**IMPLEMENTACIÓN DE COMANDOS PARA EL CÁLCULO DE  
LA CURVATURA DE CURVAS, SUPERFICIES E  
HIPERSUPERFICIES EN EL ESPACIO EUCLIDIANO  
CUATRIDIMENSIONAL, MEDIANTE EL SOFTWARE  
MATHEMATICA**

## **TESIS**

**PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS,  
CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA**

**Lic. Rubén Teodoro Urbina Guzmán**

**PIURA – PERÚ**

**Enero, 2020**

# UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

ESCUELA DE POSGRADO  
SECCIÓN DE CIENCIAS




PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS, CON MENCIÓN EN  
MATEMÁTICA APLICADA

## TÍTULO

**IMPLEMENTACIÓN DE COMANDOS PARA EL CÁLCULO  
DE LA CURVATURA DE CURVAS, SUPERFICIES E  
HIPERSUPERFICIES EN EL ESPACIO EUCLIDIANO  
CUATRIDIMENSIONAL, MEDIANTE EL SOFTWARE  
MATHEMATICA**

APROBADA EN CONTENIDO Y ESTILO POR

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Antonio Gómez Navarro  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Luis Aguilar Ibáñez  
Secretario

  
\_\_\_\_\_  
M.Sc. María Hidalgo Tinedo  
Vocal

# UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

ESCUELA DE POSGRADO  
SECCIÓN DE CIENCIAS

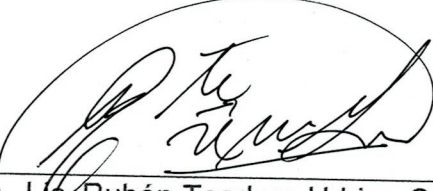


PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS, CON MENCIÓN EN  
MATEMÁTICA APLICADA

## TÍTULO

**IMPLEMENTACIÓN DE COMANDOS PARA EL CÁLCULO DE  
LA CURVATURA DE CURVAS, SUPERFICIES E  
HIPERSUPERFICIES EN EL ESPACIO EUCLIDIANO  
CUATRIDIMENSIONAL, MEDIANTE EL SOFTWARE  
MATHEMATICA**

**LOS SUSCRITOS DECLARAMOS QUE EL PRESENTE TRABAJO DE  
TESIS ES ORIGINAL, EN SU CONTENIDO Y FORMA**

  
\_\_\_\_\_  
Lic. Rubén Teodoro Urbina Guzmán  
Autor

  
\_\_\_\_\_  
Dra. Sonia Casos Fernández  
Asesora





# ESCUELA DE POSGRADO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

## ACTA DE SUSTENTACIÓN

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMÁTICA APLICADA

Los Miembros del Jurado Calificador que suscriben, reunidos para la sustentación de la Tesis, para optar el Grado Académico de Maestro en **MATEMÁTICA APLICADA**, presentada por:

**URBINA GUZMAN – RUBEN TEODORO**

Con el asesoramiento de la DRA. SONIA ALICIA CASOS FERNANDEZ, denominada:

**"IMPLEMENTACIÓN DE COMANDOS PARA EL CÁLCULO DE LA CURVATURA DE CURVAS, SUPERFICIES E HIPERSUPERFICIES EN EL ESPACIO EUCLIDIANO CUATRIDIMENSIONAL, MEDIANTE EL SOFTWARE MATHEMATICA"**

Oídas las respuestas y absueltas las observaciones formuladas, se declara:

APROBADO				DESAPROBADO
Excelente	Sobresaliente	Bueno	Aceptable	
_____	<u>X</u>	_____	_____	_____

En consecuencia, previa aprobación del Art.º 83, del Reglamento General de la Escuela de Posgrado, queda en condiciones de ser calificado **APTO** para obtener el Grado Académico de **MAESTRO EN MATEMÁTICA APLICADA**, de conformidad con lo estipulado en la ley.

PIURA, JUEVES 23 DE ENERO DEL 2020

DR. JOSE ANTONIO GOMEZ NAVARRO  
PRESIDENTE

DR. LUIS AGUILAR IBÁÑEZ  
SECRETARIO

M.Sc. MARIA ISABEL HIDALGO TINEDO  
VOCAL



© Rubén Teodoro Urbina Guzmán - 2020  
Todos los derechos reservados

## **Dedicatoria**

*“Esta tesis está dedicada a Dios, fuente de sabiduría y fortaleza. A Elida mi esposa, por la paciencia, constante apoyo y sus muchas oraciones. A mis padres José y Juana que siempre me apoyaron a seguir adelante. A mis hijos Sharon, Keren, Isai y Keila, razón de ser de tanto sacrificio”*

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradecemos a Dios por la vida y la sabiduría, por guiarnos a lo largo de nuestra existencia y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y de debilidad.

Agradecimiento a la Dra. Sonia Casos Fernández, asesora de tesis, por la confianza depositada en mi persona, por su constante apoyo y por el tiempo dedicado para la culminación de la investigación.

Agradecemos a todas aquellas personas que en el transcurso de la tesis apoyaron a culminar este proyecto casi interminable, que llevo más de una década en poder concluirla.



# **IMPLEMENTACIÓN DE COMANDOS PARA EL CÁLCULO DE LA CURVATURA DE CURVAS, SUPERFICIES E HIPERSUPERFICIES EN EL ESPACIO EUCLIDIANO CUATRIDIMENSIONAL, MEDIANTE EL SOFTWARE MATHEMATICA**

Enero, 2020

Lic. Rubén Teodoro Urbina Guzmán

Tesis de Maestría en Ciencias, con mención en Matemática Aplicada, presentada a la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional de Piura.

## **RESUMEN**

En la investigación se muestra cómo calcular las curvaturas de una curva en un espacio euclidiano cuatrídimensional, para ello se muestran algoritmos que permite realizar dichos cálculos. En segundo lugar, se muestra cómo calcular la curvatura de una 2-superficie; se define la primera y segunda forma fundamental de la superficie en el espacio cuatrídimensional, permitiendo calcular la curvatura gaussiana y curvatura media. Además, se define la elipse de curvatura, para realizar una interpretación geométrica de la superficie. En tercer lugar, se calcula la curvatura gaussiana, media y seccional de una 3-superficie, con la ayuda de la primera y segunda forma fundamental de la hipersuperficie. Finalmente, se implementa una serie de comandos en el Software Científico Mathematica que permiten calcular la curvatura de una curva, una 2-superficie y 3-superficie en el espacio euclidiano cuatrídimensional; esto debido a que los cálculos de forma manual resultan bastante engorrosos.

**Palabras clave:** Curvatura, superficie, hipersuperficie.

# **IMPLEMENTATION OF COMMANDS FOR CALCULATING THE CURVATURE OF CURVES, SURFACES AND HYPER SURFACES IN THE FOUR-DIMENSIONAL EUCLIDIAN SPACE, THROUGH THE MATHEMATIC SOFTWARE**

January, 2020

Lic. Rubén Teodoro Urbina Guzmán

Thesis of Master in Sciences, with mention in Applied Mathematics, presented to the Graduate School of the National University of Piura.

## **ABSTRACT**

In research shown how to calculate the curvatures of a curve in a four-dimensional Euclidean space, for it is algorithms that allows these calculations. Second, it shows how to calculate the curvature of a 2-surface; the first and second fundamental form of the surface in the four-dimensional space is defined, allowing calculated Gaussian curvature and mean curvature. Moreover, the ellipse curvature is defined, for a geometric interpretation of the surface. Third, the Gaussian, middle and sectional curvature of a 3-surface is calculated, with the help of the first and second fundamental form of the hyper surface. Finally, a series of commands are implemented in the Mathematica Scientific Software that allow to calculate the curvature of a curve, a 2-surface and 3-surface in the four-dimensional Euclidean space; this because the calculations manually are quite cumbersome.

**Key words: curvature, surface, hypersurface**

## ÍNDICE

Agradecimientos .....	VI
Resumen .....	VII
Abstract .....	VIII
Índice de figuras .....	XIII
Introducción .....	15
Capítulo I El problema de investigación .....	17
1.1. Planteamiento del problema .....	17
1.2. Formulación del problema .....	19
1.3. Objetivos .....	19
1.3.1. Objetivo general.....	19
1.3.2. Objetivos específicos .....	19
1.4. Justificación de la investigación.....	19
1.5. Alcances y limitaciones .....	21
1.6. Hipótesis y variables .....	21
1.6.1. Hipótesis.....	21
1.6.2. Variables.....	21
Capítulo II Bases teóricas .....	22
2.1. Antecedentes de la investigación .....	22
2.2. Marco teórico .....	23
2.2.1. Curvatura de curvas, superficies e hiper superficies .....	23
2.2.1.1. Espacio vectorial .....	23
2.2.1.2. Espacio vectorial euclidiano .....	26
2.2.1.3. Bases ortonormales.....	29
	IX



2.2.1.4. Curvas.....	32
2.2.1.5. Referencia móvil de Frenet.....	34
2.2.1.6. Fórmulas de Frenet. Curvaturas.....	37
2.2.1.7. Superficies .....	40
2.2.1.8. Superficie regular de dimensión $k$ o $k$ – superficie.....	45
2.2.1.9. Superficies obtenidas por valores regulares .....	49
2.2.1.10. Funciones diferenciables entre superficies .....	53
2.2.1.11. Vectores tangentes sobre superficies regulares .....	54
2.2.1.12. Superficies orientables .....	57
2.2.1.13. Primera forma cuadrática fundamental .....	59
2.2.1.14. Segunda forma cuadrática fundamental .....	62
2.2.1.15. Curvaturas principales.....	67
2.2.1.16. Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$ .....	73
2.2.2. La implementación de comandos con el software <i>MATHEMATICA</i> .....	76
2.2.2.1. Funciones matemáticas comunes .....	78
2.2.2.2. Listas.....	79
2.2.2.3. Definición de funciones .....	79
2.2.2.4. Operaciones con expresiones algebraicas .....	80
2.2.2.5. Paletas .....	80
2.2.2.6. Gráficos con Mathematica .....	82
2.2.2.7. Packages .....	84
2.3. Definición de términos básicos o marco conceptual .....	85
Capítulo III Metodología de la investigación.....	87
3.1. Tipo de investigación.....	87
3.2. Diseño de la investigación.....	87
Capítulo IV Resultados de la investigación .....	88
4.1. Curvatura de una curva en $E^4$ .....	88
4.1.1. Propiedades geométricas en $E^4$ .....	89

4.1.2. Algoritmo para determinar las curvaturas de una curva de rapidez unitaria.....	90
4.1.3. Curvas de rapidez arbitraria.....	93
4.1.4. Algoritmo para determinar las curvaturas de una curva de rapidez arbitraria .....	96
4.2. Curvatura de una 2-superficie en $E^4$ .....	98
4.2.1. Curvatura media y gaussiana .....	103
4.2.2. Elipse de curvatura normal .....	104
4.3. Curvatura de una hipersuperficie en $E^4$ .....	107
4.3.1. Primera forma fundamental.....	109
4.3.2. Segunda forma fundamental.....	111
4.3.3. Curvatura media, seccional y gaussiana.....	115
4.4. Comandos para el cálculo de las curvaturas de una curva en $E^4$ .....	116
4.4.1. Sintaxis de comandos en Mathematica.....	116
4.4.2. Comandos en Mathematica para calcular la curvatura de una curva ...	118
4.4.3. Uso de los comandos para determinar la curvatura de una curva.....	119
4.5. Comandos para el cálculo de la curvatura de una 2-superficie en $E^4$ .....	127
4.5.1. Comandos en Mathematica para calcular la curvatura de una 2-superficie .....	127
4.5.2. Uso de los comandos para determinar la curvatura de una 2-superficie .....	130
4.6. Comandos para el cálculo de la curvatura de una hipersuperficie en $E^4$ ...	135
4.6.1. Comandos en Mathematica para calcular la curvatura de una 3-superficie .....	135
4.6.2. Uso de los comandos para determinar la curvatura de una 3-superficie .....	139
Conclusiones .....	143
Recomendaciones .....	144
Referencias bibliográficas.....	145

Anexos .....	148
--------------	-----



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Superficie regular.....	43
Figura 2. Cambio de parámetro en una k-superficie .....	46
Figura 3. Función diferenciable entre superficies .....	53
Figura 4. Vectores tangentes sobre una superficie regular .....	56
Figura 5. Descomposición del vector curvatura, en sus componentes: normal y tangente .....	64
Figura 6. Paleta: ayudante de clase.....	81
Figura 7. Vectores tangentes de una 2-superficie .....	100
Figura 8. Elipse de curvatura normal .....	105
Figura 9. Vectores tangentes de una 3-superficie .....	108
Figura 10. Comandos que permiten calcular los vectores normales de una curva	118
Figura 11. Comando Curvatura. Calcula las curvaturas de una curva.....	119
Figura 12. Circunferencia en $E^4$ .....	120
Figura 13. Vectores ortogonales a la circunferencia .....	121
Figura 14. Cálculo de la curvatura de la circunferencia.....	121
Figura 15. Una curva en $E^4$ .....	122
Figura 16. Vectores ortogonales de una curva.....	123
Figura 17. Cálculo de las curvaturas de la curva.....	124
Figura 18. Proporcionalidad de las curvaturas .....	124
Figura 19. Curva en $E^4$ .....	125
Figura 20. Vectores normales a la curva del ejemplo 3.....	126
Figura 21. Curvaturas de la curva del ejemplo 3.....	126
Figura 22. Comando Vectores normales, para una 2-superficie.....	127
Figura 23. Comando FormasFundamentales.....	128
Figura 24. Comandos CurvaturaGaussiana y CurvaturaMedia .....	128
Figura 25. Comando ElipseDeCurvatura .....	129
Figura 26. Comando FamiliaDeElipses .....	129
Figura 27. Esfera en $E^4$ .....	130
Figura 28. Vectores Unitarios de la esfera en $E^4$ .....	130

Figura 29. Formas fundamentales de la esfera en $E^4$ .....	131
Figura 30. Elipse de curvatura de la esfera en $E^4$ .....	131
Figura 31. Familia de elipses de la esfera en $E^4$ .....	132
Figura 32. Toro Plano .....	133
Figura 33. Formas fundamentales y curvatura gaussiana del toro plano .....	133
Figura 34. Vector de curvatura media del toro plano.....	134
Figura 35. Elipse de curvatura del toro plano.....	134
Figura 36. Familia de Elipses de curvatura del toro plano.....	135
Figura 37. Comandos Ridic y VectorNormal .....	136
Figura 38. Comandos PrimeraForma, SegundaForma y OperadorDeForma .....	137
Figura 39. Comandos CurvaturaGaussiana, CurvaturaMedia y CurvaturaSeccional .....	138
Figura 40. Hiperesfera en $E^4$ .....	139
Figura 41. Primera y segunda forma fundamental de la hiperesfera .....	140
Figura 42. Curvaturas de una hiperesfera.....	140
Figura 43. Hipertoro de revolución y su vector unitario .....	141
Figura 44. Primera y segunda forma fundamental del hipertoro.....	142
Figura 45. Curvaturas del hipertoro .....	142

## INTRODUCCIÓN

Los Cursos de Geometría Diferencial impartidos en pre-grado, en la Universidad Nacional de Piura, para los alumnos de la especialidad de Matemática; se basan en el estudio de curvas y superficies en el espacio euclidiano tridimensional, dejando de lado el estudio de curvas y superficies en espacios de mayor dimensión, por no ser uno de los objetivos de los cursos impartidos.

De este modo, queda como problema abierto el estudio de la Geometría Diferencial de curvas, superficies e hipersuperficies en el espacio euclidiano cuatridimensional.

El propósito de la investigación es implementar comandos para el cálculo de la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies en el espacio euclidiano cuatridimensional mediante el software científico Mathematica; puesto que los cálculos son engorrosos para hacerlos manualmente.

Los comandos implementados se dividen en tres grandes grupos. El primer grupo implementa comandos que permiten calcular las curvaturas de una curva. El segundo grupo de comandos permite calcular la curvatura gaussiana y curvatura media de una 2-superficie, además existe un comando que permite graficar la elipse de curvatura normal a la superficie en un punto dado. El tercer grupo de comandos, permite calcular la curvatura gaussiana, media y seccional de una 3-superficie.

El informe de investigación consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo titulado “El problema de investigación” se describe y formula la problemática que atiende la investigación, los objetivos, la justificación, alcances y limitaciones de la investigación, las hipótesis y variables planteadas.

En el segundo capítulo titulado “Marco Teórico” se presentan los elementos teóricos y conceptuales que sustentan el procedimiento para la construcción de la propuesta de investigación. El tercer capítulo describe la metodología utilizada en la investigación incluyendo el tipo y diseño



considerado. El cuarto capítulo presenta los resultados obtenidos en la investigación, incluye los comandos implementados, y en él se describe la realización de cada uno de los objetivos. En la última parte se presentan las conclusiones, recomendaciones y referencias bibliográficas

# CAPÍTULO I

## EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

### 1.1. Planteamiento del problema

La Geometría Diferencial es una técnica que, mediante métodos diferenciales, da respuesta a numerosos problemas matemáticos y además se puede completar con las herramientas necesarias para introducir la Geometría Riemanniana que es una teoría que unifica la geometría euclidiana, la llamada geometría analítica, la geometría proyectiva y la geometría hiperbólica. También deja el camino abierto para introducir la Geometría Pseudo-Riemanniana que da un marco adecuado para el estudio de la Teoría de la Relatividad.

En el siglo XVII se produce un hito matemático importante: el nacimiento del cálculo diferencial, impulsado principalmente por Isaac Newton (1642-1727) en Inglaterra, e independientemente, por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en Alemania. Poco a poco el uso de técnicas diferenciales para la resolución de problemas geométricos fue determinando la disciplina matemática que hoy denominamos como Geometría Diferencial.

El uso sistemático de coordenadas en dimensión tres puede verse ya en 1731 en el libro de Alexis Claude Clairaut (1713-1765) "*Investigaciones sobre curvas de doble curvatura*". Clairaut interpretaba correctamente una superficie como las soluciones de una ecuación única y las curvas en el espacio las consideraba como intersección de dos superficies; es decir, mediante dos ecuaciones.

Leonard Euler (1707-1783) continuó con la investigación de geodésicas sobre superficies, en particular dio la ecuación diferencial de una geodésica en una superficie. Analizó también la curvatura de las secciones planas de una superficie dando expresiones para el cálculo de las curvaturas principales. En 1771, en un artículo sobre cuerpos cuyas superficies se

pueden superponer en un plano, Euler introdujo el concepto de superficie desarrollable.

Gaspard Monge (1746-1818) en los años 80 publicó dos obras, en las que estudio propiedades de curvas en el espacio y de las superficies. Introdujo nociones y terminología todavía utilizadas en la actualidad, como las de superficie desarrollable y rectificable, arista de retroceso, lugar geométrico de los centros de curvatura, etc.

La traducción de hechos geométricos en términos de ecuaciones en derivadas parciales y ecuaciones diferenciales ordinarias condujo a la geometría diferencial a una nueva fase en la que se interrelacionaban algunos aspectos geométricos con otros de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Una nueva etapa de la Geometría Diferencial se puso de manifiesto con las investigaciones de Karl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777– Gotinga, 1855) sobre la geometría intrínseca de las superficies, es decir, aquellas propiedades que son invariantes por transformaciones que preservan las longitudes y los ángulos que forman las curvas contenidas en las superficies. Se cita el llamado Teorema Egregio de Gauss que asegura que la curvatura de una superficie es intrínseca

A mediados del siglo XIX aparece un nuevo principio general sobre qué es lo que se puede entender por geometría. Esta idea fue expuesta por Bernhard Riemann (1826-1886, alumno de Gauss) en el año 1854 en una conferencia titulada “*Sobre las hipótesis que yacen en los fundamentos de la Geometría*”. Según Riemann, para la construcción de una geometría es necesario dar: una variedad de elementos, las coordenadas de estos elementos y la ley que mide la distancia entre elementos de la variedad infinitamente próximos. Para ello se supone que las partes infinitesimales de la variedad se miden euclidianamente.

Esta forma de concebir el espacio ha evolucionado con el tratamiento dado a comienzos del siglo XX en los trabajos de los matemáticos italianos M. M. G. Ricci (1853-1925) y T. Levi-Civita (1873-1941) hasta la noción que hoy denominamos como variedad riemanniana. La definición que actualmente utilizamos de variedad diferenciable (o diferencial) se atribuye a Hassler Whitney que en 1936 presentaba una variedad como una serie de piezas euclidianas pegadas con funciones diferenciables.

En el estudio de la teoría antes mencionada se requiere realizar cálculos extensos y algo engorrosos, en los softwares habituales con los que

se trabaja no existe comandos que faciliten el cálculo de la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies, en espacios cuatridimensionales, entre otras características diferenciales.

## **1.2. Formulación del problema**

¿Cómo implementar comandos mediante el software Mathematica para calcular la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies en el espacio euclidiano cuatridimensional?

## **1.3. Objetivos**

### **1.3.1. Objetivo general**

Implementar comandos para el cálculo de la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies en el espacio euclidiano cuatridimensional mediante el software Mathematica.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- i. Determinar las curvaturas de una curva en  $E^4$ .
- ii. Determinar la curvatura seccional gaussiana de una superficie en  $E^4$ .
- iii. Determinar la curvatura gaussiana de una hipersuperficie en  $E^4$ .
- iv. Implementar comandos para el cálculo de las curvaturas de una curva en  $E^4$ .
- v. Implementar comandos para el cálculo de la curvatura gaussiana de una hipersuperficie en  $E^4$ .

## **1.4. Justificación de la investigación**

El estudio de curvas y superficies en geometría diferencial, tiene varias direcciones, puede abordarse de forma clásica (Barret O'neil, Do Carmo) o de forma moderna haciendo uso de las formas de conexión y variedades

diferenciales; incluso dicho estudio puede hacerse mediante la topología diferencial. Dado que, entre los matemáticos existe la obsesión de generalización, obteniendo las definiciones y los teoremas aplicables en un número mayor de cosas; es por ello que existe la motivación para extender el estudio de curvas y superficies a dimensiones mayores a tres, en este caso particular a la dimensión cuatro o también llamada cuarta dimensión geométrica.

De este modo, para abordar el estudio del espacio cuatridimensional  $E^4$ , también existen muchas direcciones, la dirección que se siguió es la forma clásica, sin llegar a hacer uso de las formas diferenciales. Primero se realizó un estudio de curvas, para tal fin se define el producto vectorial para tres vectores cuatridimensionales (Marmolejo 1994), de forma similar a como se define el producto vectorial de dos vectores en  $E^3$ . Para fines de estudio, ahora se necesita tres vectores, el vector resultante tendrá la propiedad esperada, que sea perpendicular a cada uno de los vectores dados. A partir de allí, se puede calcular los tres tipos de curvatura que posee una curva en  $E^4$ . Metodología que servirá de referente para abordar este tipo de estudios.

Determinar la curvatura de una superficie en  $E^4$  será un poco más ingeniosa, pues es necesario construir el espacio normal a la superficie. En  $E^3$ , es relativamente fácil, pues se aplica el producto vectorial y se obtiene el vector normal a la superficie; en este caso no se puede obtener de esa forma el espacio normal, así que se recurre a un artificio para la obtención de dicho espacio normal. La superficie en  $E^4$  tiene dos tipos de curvatura: la curvatura seccional media y la curvatura seccional gaussiana.

Las hipersuperficies del espacio euclidiano, son ejemplos básicos de variedades diferenciales, el estudio de su curvatura, permite determinar tres tipos de curvatura: curvatura media, curvatura seccional media principal y curvatura gaussiana (Solanilla 2006). Con lo que se establecerá un aporte teórico en este tema.

Aun cuando existe bibliografía sobre curvas y superficies en  $E^4$ , son pocos los artículos y libros que muestran y explican de manera explícita como determinar o calcular la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies; nos referimos a una forma o fórmula tal y como se conoce en  $E^3$ . El desarrollo de la investigación permitirá obtener fórmulas de manera didáctica y fácil de entender, comprender y aplicar por los lectores no acostumbrados a escritura matemática abstracta; esto es, hacer legible las fórmulas de curvatura.

Por tanto, dada la complejidad de la teoría a tratar en la que puede resultar engorroso los cálculos de la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies en  $E^4$ , los resultados de la investigación brindarán una herramienta que facilite estos procedimientos, a modo de comandos de cálculo mediante el uso del software Mathematica.

## **1.5. Alcances y limitaciones**

La investigación tiene un alcance descriptivo, teórico, pero también tecnológico; donde se alcanza a describir de modo muy detallado y usando el método analítico la teoría referida a curvatura, de curvas, superficies e hipersuperficies. Así mismo, se describe la metodología para formular comandos que faciliten los cálculos de las curvaturas señaladas. La investigación está limitada al estudio de superficies contenidas en un espacio vectorial cuatridimensional, no incluyendo dimensiones superiores.

## **1.6. Hipótesis y variables**

### **1.6.1. Hipótesis**

Es posible Implementar comandos para el cálculo de la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies en el espacio euclidiano cuatridimensional mediante el uso del software Mathematica, previo a la formulación de ecuaciones que determinen el valor de la curvatura.

### **1.6.2. Variables**

#### **Variable independiente**

- Comandos

#### **Variables dependientes**

- Curvatura de curvas
- Curvatura de superficies
- Curvatura de hipersuperficies

## **CAPÍTULO II**

### **BASES TEÓRICAS**

#### **2.1. Antecedentes de la investigación**

##### **A nivel internacional:**

Basto-Gonçalves (2013) publica un artículo en el que realiza un estudio de las superficies en  $E^4$ , donde muestra la indicatriz o curva elíptica de una superficie en  $E^4$ . Construye además el plano normal a la superficie en un punto  $p$ . Donde describe expresiones para determinar la curvatura gaussiana y curvatura normal, mediante el uso de cartas de Monge, sin embargo, no hace uso de algún software que facilite el cálculo.

Solanilla, Barreto y Vargas (2006) publicaron un artículo donde muestran que una hipersuperficie en  $E^4$  posee tres tipos de curvaturas: curvatura media, curvatura seccional media principal y curvatura gaussiana; además hacen una demostración del Teorema Egregio para hipersuperficies, haciendo uso de las formas diferenciales. No muestran una representación explícita de las curvaturas arriba mencionadas.

Ganchev y Milousheva (2015) publicaron un artículo en el que se estudia las superficies en los espacios euclidiano y de Minkowski cuatridimensionales. El enfoque que usan en introducir un mapeo invariante de tipo Weingarten en el plano tangente de la superficie. Además, muestran que las clases geométricas básicas de superficies, quedan determinadas por las condiciones de sus invariantes. Las fórmulas para determinar la curvatura de una superficie hacen uso de formas diferenciales.



Vaz de Almeida (2011) en su tesis de maestría, hace un estudio de las propiedades geométricas de las curvas en  $E^4$ . Mediante el uso del producto vectorial en  $E^4$  determina el tetraedro móvil de Frenet para cada punto de la curva, luego calcula los tres tipos de curvatura de una curva.

**A nivel Nacional:**

No se encontraron antecedentes a nivel nacional.

**A nivel Regional:**

No se encontraron antecedentes a nivel regional.

## **2.2. Marco teórico**

### **2.2.1. Curvatura de curvas, superficies e hiper superficies**

A continuación, se presentan definiciones, teoremas y propiedades correspondientes a la teoría básica necesaria para el estudio de la curvatura de curvas y superficies, a partir de la cual se inducirá generalizaciones al estudio en  $E^4$ . Esta sección se elabora considerando la teoría que describen los autores Do Carmo (1976), Barret O'Neil (1972), Frenet, F (1852), Acosta (2011) y Aguirre(2006), entre otros autores.

#### **2.2.1.1. Espacio vectorial**

**Definición 2.1.** *Un espacio vectorial es una terna  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ , donde  $\mathbf{V}$  es un conjunto no vacío y  $+$ ,  $\cdot$  son dos operaciones del tipo  $+: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ ,  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  a las que llamaremos 'suma de vectores' y 'producto por escalares', respectivamente; con las siguientes propiedades:  $\forall u, v, w \in \mathbf{V}$*

1.  $u + v \in \mathbf{V}$  (clausura aditiva)
2.  $u + v = v + u$  (conmutativa)
3.  $u + (v + w) = (u + v) + w$  (asociativa)
4. Existe  $e \in \mathbf{V}$  tal que  $e + v = v + e = v$ ,  $\forall v \in \mathbf{V}$  (elemento neutro)
5. Para cada  $v \in \mathbf{V}$  existe  $w$  tal que  $v + w = w + v = e$  (elemento opuesto)
6.  $\lambda v \in \mathbf{V}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  (clausura multiplicativa)

7.  $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbf{V}$  (pseudo asociativa)
8.  $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$  y  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbf{V}$  (distributiva)
9.  $1v = v, \forall v \in \mathbf{V}$  (unimodular)

De forma abreviada, diremos que  $\mathbf{V}$  es un espacio vectorial. A los elementos de  $\mathbf{V}$  los llamaremos vectores y a los elementos de  $\mathbb{R}$ , escalares.

**Definición 2.2.** Sean  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  dos espacios vectoriales. Se define en  $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \{(v_1, v_2) / v_i \in \mathbf{V}_i\}$  las siguientes operaciones:

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Con esta suma y producto por escalares,  $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$  es un producto vectorial y se llama espacio producto.

Como caso particular, se tiene  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . De la misma forma, se define el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

**Definición 2.3.** Sea  $\mathbf{V}$  un espacio vectorial y  $U$  un subconjunto suyo. Se dice que  $U$  es un subespacio vectorial de  $\mathbf{V}$  si satisface las siguientes propiedades:

1. Si  $u, v \in U$ , entonces  $u + v \in U$ .
2. Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $u \in U$ , entonces  $\lambda u \in U$ .
3. Con la suma y producto por escalares de  $\mathbf{V}$ ,  $U$  es un espacio vectorial.

**Definición 2.4.** Sean  $U$  y  $W$  subespacios vectoriales de  $\mathbf{V}$ . Se define la suma de  $U$  con  $W$  como el conjunto

$$U + W = \{u + w / u \in U, w \in W\}$$

Entonces  $U + W$  es un subespacio vectorial

**Definición 2.5.** Un espacio vectorial  $\mathbf{V}$  es suma directa de dos subespacios vectoriales  $U$  y  $W$ , y se denota por  $\mathbf{V} = U \oplus W$ , si  $\mathbf{V} = U + W$  y  $U \cap W = \{0\}$ .

**Definición 2.6.** Sea  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  un conjunto de vectores de un espacio vectorial  $\mathbf{V}$ . Una combinación lineal de  $X$  es una suma del tipo

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Se llama subespacio vectorial generado por  $X$  al conjunto de combinaciones lineales:

$$\langle X \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = L(\{X\}) = L(\{v_1, \dots, v_n\}) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i; a_i \in \mathbb{R} \right\} = \text{sub}(v_1, \dots, v_n)$$

**Definición 2.7.** Un conjunto de vectores  $\{v_1, \dots, v_n\}$  se dice que es linealmente independiente (o que forma un conjunto de vectores libre) si la única combinación lineal nula de ellos es la trivial, es decir, si siempre que se tenga

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \text{ entonces } \lambda_i = 0, \forall i = 1, n.$$

En caso contrario, se dice que son linealmente dependientes.

**Definición 2.8.** Un conjunto de vectores  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de un espacio vectorial  $\mathbf{V}$  se denomina base si es un sistema de generadores y además linealmente independiente.

**Teorema 2.1. (de la base)** Sea  $\mathbf{V}$  un espacio vectorial finitamente generado. Entonces todas las bases de  $\mathbf{V}$  tienen el mismo cardinal, al que se llamará dimensión de  $\mathbf{V}$ .

En otras palabras, la dimensión es el máximo número de vectores linealmente independientes que podemos tener en el espacio vectorial.

**Definición 2.9.** Una aplicación  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  entre dos espacios vectoriales se dice que es lineal si satisface las dos siguientes propiedades:  $\forall u, v \in \mathbf{V}, \lambda \in \mathbb{R}$

1.  $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2.  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Si  $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$ , se llama también endomorfismo

Esta definición es equivalente a

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbf{V}$$

**Definición 2.10.** El núcleo de una aplicación lineal  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  es el conjunto

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{v \in \mathbf{V}; f(v) = 0\}$$

Cumpliendo que el  $\text{Ker}(f)$  es un subespacio vectorial de  $\mathbf{V}$

**Teorema 2.2.** Una aplicación lineal  $f$  es inyectiva si y sólo si  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .

**Definición 2.11.** Una forma bilineal en un espacio vectorial  $\mathbf{V}$ , es una aplicación  $T : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las dos siguientes propiedades:  $\forall u, v, w \in \mathbf{V}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1.  $T(\lambda u + \mu v, w) = \lambda T(u, w) + \mu T(v, w)$
2.  $T(u, \lambda v + \mu w) = \lambda T(u, v) + \mu T(u, w)$

**Definición 2.12.** Una forma bilineal se llama simétrica (respectivamente antisimétrica) si  $T(u, v) = T(v, u)$  (respectivamente  $T(u, v) = -T(v, u)$ )

#### 2.2.1.2. Espacio vectorial euclidiano

Manzano J. (2011), de la Universidad Complutense de Madrid, señala las siguientes definiciones y propiedades sobre espacios vectoriales euclidianos.

**Definición 2.13.** Un **producto escalar** sobre un espacio vectorial  $\mathbf{V}$  es una aplicación  $g : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , que verifica las siguientes tres propiedades:

1.  $g$  es bilineal
2.  $g$  es simétrica (es decir,  $g(u, v) = g(v, u)$ ,  $\forall u, v \in \mathbf{V}$ )

3.  $g$  es definida positiva (es decir,  $g(v, v) > 0$  para cualquier  $v \in \mathbf{V}$  no nulo).

Se utiliza a menudo la letra  $g$  para denotar un producto escalar, aunque es también usual utilizar unos corchetes  $\langle u, v \rangle$  (o un punto  $u \cdot v$ ) para hacer referencia al producto escalar de dos vectores  $u$  y  $v$ .

**Definición 2.14.** Sea  $\mathbf{V}$  un espacio vectorial y  $g$  un producto escalar sobre  $\mathbf{V}$ . Entonces, al par  $(\mathbf{V}, g)$  se le llama *Espacio Vectorial Euclídeo*.

**Definición 2.15.** Dado un espacio vectorial euclídeo  $(\mathbf{V}, g)$  se define la norma o módulo de un vector  $v \in \mathbf{V}$  y lo denotamos por  $\|v\|$  al número real no negativo

$$\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$$

La aplicación  $\|\cdot\|: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama la aplicación norma asociada a  $g$ .

**Teorema 2.3. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).** Sea  $(\mathbf{V}, g)$  un espacio vectorial euclídeo y  $\|\cdot\|$  la norma asociada a  $g$ . Entonces, para cualesquiera  $u, v \in \mathbf{V}$ , se cumple que

$$|g(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

y la igualdad se alcanza si, y sólo si,  $u$  y  $v$  son linealmente dependientes.

**Demostración.**

Dados  $u, v \in \mathbf{V}$ , si  $u = 0$  ó  $v = 0$  la desigualdad es trivial. En caso contrario, consideremos el vector  $\alpha u - \beta v$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  arbitrarios. Entonces

$$0 \leq \|\alpha u - \beta v\|^2 = g(\alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v) = \alpha^2 \|u\|^2 + \beta^2 \|v\|^2 - 2\alpha\beta g(u, v)$$

Ahora tomemos  $\alpha = \|v\|^2$  y  $\beta = g(u, v)$  resulta

$$0 \leq \|v\|^4 \|u\|^2 + g(u, v)^2 \|v\|^2 - 2g(u, v)^2 \|v\|^2$$

Simplificando (dado que  $\|v\| \neq 0$ ), tenemos

$$\|u\|^2 \|v\|^2 \geq g(u, v)^2.$$

Como las normas son cantidades no negativas por definición, podemos eliminar los cuadrados introduciendo en el miembro de la derecha un valor absoluto.

Si se da la igualdad, retrocediendo en el razonamiento  $g(\alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v) = 0$  pero como el producto escalar es definido positivo,  $\alpha u - \beta v = 0$  y son linealmente dependientes. Recíprocamente, si son linealmente dependientes se da trivialmente la igualdad.

**Proposición 2.1.** Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial euclídeo y  $\|\cdot\|$  la norma asociada a  $g$ . Entonces,

- i.  $\|u\| \geq 0$  para cualquier  $u \in V$ .
- ii. Dado  $u \in V$ , se tiene que  $\|u\| = 0$  sí, y solo sí,  $u = 0$ .
- iii.  $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ , para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $u \in V$ .
- iv.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  para cualquiera  $u, v \in V$ .

El apartado (iv) se conoce como *desigualdad de Minkowski* o *desigualdad triangular*.

**Definición 2.16.** En un espacio vectorial euclídeo, se llama *ángulo* de dos vectores no nulos  $u$  y  $v$  no nulos y se denota por  $\angle(u, v)$  al número real

$$\angle(u, v) = \arccos \frac{g(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \in [0, \pi].$$

**Observación 2.1.**

- i. Dados dos vectores  $u, v \in \mathbf{V}$  no nulos, estos son linealmente independientes si, y sólo si  $g(u, v) = \|u\| \cdot \|v\|$ , luego son dependientes si, y sólo si,  $\angle(u, v) = 0$  ó  $\angle(u, v) = \pi$ .
- ii. Dados dos vectores  $u$  y  $v$  no nulos, estos son ortogonales si, y sólo si,  $g(u, v) = 0$ . En otras palabras, son perpendiculares cuando  $\angle(u, v) = \frac{\pi}{2}$ .

**Proposición 2.2. (Identidad de polarización).** Sea  $(\mathbf{V}, g)$  un espacio vectorial euclídeo con norma asociada  $\|\cdot\|$ . Dados  $u, v \in \mathbf{V}$ , se cumple que

$$g(u, v) = \frac{1}{2} \left( \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right).$$

**Demostración.** Basta despejar en la siguiente igualdad

$$\|u + v\|^2 = g(u + v, u + v) = \|u\|^2 + 2g(u, v) + \|v\|^2$$

**Teorema 2.4. (Teorema del coseno).** Sea  $(\mathbf{V}, g)$  un espacio vectorial euclídeo con norma asociada  $\|\cdot\|$ . Dados  $u, v \in \mathbf{V}$  no nulos, se cumple que

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos \angle(u, v).$$

**2.2.1.3. Bases ortonormales**

**Definición 2.17.** Sea  $(\mathbf{V}, g)$  un espacio vectorial euclídeo

- i. Un vector  $u \in \mathbf{V}$  se dice unitario si  $\|u\| = 1$ .
- ii. Una base  $B$  se dice ortonormal si es ortogonal y sus vectores son unitarios.

Al conjunto de todos los vectores unitarios se le llama esfera unidad.



**Proposición 2.3.** *Todo espacio vectorial euclídeo admite bases Ortonormales.*

**Demostración.** Del teorema de Sylvester (López 2016) se deduce que existe una base ortogonal de  $\mathbf{V}$ . Como todos los vectores de la base son no nulos, al dividirlos por sus respectivas normas se hacen unitarios. Al multiplicar un vector no nulo por un escalar no varía su ortogonalidad con otros vectores y por lo tanto la base así obtenida es ortonormal

**Proposición 2.4.** *Sea  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormal de un espacio vectorial euclídeo  $(\mathbf{V}, g)$ .*

- i. *Dados  $u, v \in \mathbf{V}$  con coordenadas  $C_B(u) = (u_1, \dots, u_n)$  y  $C_B(v) = (v_1, \dots, v_n)$  en la base  $B$ ,*

$$g(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

- ii. *Dado  $u \in \mathbf{V}$ , las coordenadas de  $u$  en la base  $B$  de  $u$  están dadas por*

$$C_B(u) = (g(u, e_1), \dots, g(u, e_n)).$$

**Teorema 2.5. (Teorema de ortogonalización de Gram-Schmidt).** *Sea  $(\mathbf{V}, g)$  un espacio vectorial euclídeo y  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base (cualquiera) de  $\mathbf{V}$ . Entonces, el conjunto  $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  dado por*

$$e'_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{g(e_k, e'_i)}{\|e'_i\|^2} e'_i$$

*Verifica las siguientes dos propiedades.*

- i.  *$B'$  es una base ortogonal.*
- ii. *Para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  se cumple que  $L(\{e'_1, \dots, e'_k\}) = L(\{e_1, \dots, e_k\})$*

**Demostración.** Se inicia construyendo la nueva base  $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  y aplicando un proceso de inducción finita. Como  $e'_1$  se toma el propio  $e_1$  y evidentemente se

cumple que  $L(\{e'_1\}) = L(\{e_1\})$ . Suponiendo que se ha definido  $e'_1, \dots, e'_{k-1}$ , con  $1 < k < n$ , ortogonales dos a dos, se verifica que  $L(\{e'_1, \dots, e'_{k-1}\}) = L(\{e_1, \dots, e_{k-1}\})$ , calculando  $e'_k$ .

Para que se cumpla  $L(\{e'_1, \dots, e'_k\}) = L(\{e_1, \dots, e_k\})$  y, dada la hipótesis de inducción, se establece que el nuevo vector sea de la forma

$$e'_k = e_k - \alpha_1 e'_1 - \dots - \alpha_{k-1} e'_{k-1},$$

luego, imponiendo que  $e'_k$  debe ser ortogonal a  $e'_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , se tiene

$$\begin{aligned} g(e'_k, e'_i) = 0 &\Rightarrow g(e_k - \alpha_1 e'_1 - \dots - \alpha_{k-1} e'_{k-1}, e'_i) = 0 \\ &\Rightarrow g(e_k, e'_i) - \alpha_i g(e'_i, e'_i) = 0 \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de que  $e'_1, \dots, e'_{k-1}$  son ortogonales entre sí. Despejando  $\alpha_i$

$$\alpha_i = \frac{g(e_k, e'_i)}{g(e'_i, e'_i)} = \frac{g(e_k, e'_i)}{\|e'_i\|^2}.$$

Por lo tanto, se obtiene la expresión del enunciado para el vector  $e'_k$  y puede comprobarse que da una base ortogonal de  $\mathbf{V}$ .

**Definición 2.16 (Subespacios ortogonales).** Dado un subconjunto  $S$  de un espacio vectorial euclídeo  $(\mathbf{V}, g)$ , se define otro subconjunto, el de los vectores ortogonales a todos los de  $S$ , como

$$S^\perp = \{u \in \mathbf{V} : g(u, v) = 0, \forall v \in S\}$$

Además, cumple con las siguientes propiedades:

- i.  $S^\perp$  es siempre un subespacio vectorial de  $\mathbf{V}$ ,
- ii.  $S^\perp = L(S)^\perp$ .
- iii.  $S^{\perp\perp} = L(S)$

**Proposición 2.5.** Sea  $\mathbf{U}$  un subespacio vectorial euclídeo  $(\mathbf{V}, g)$ . Entonces

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp$$

En consecuencia,  $\dim \mathbf{U} + \dim(\mathbf{U}^\perp) = \dim(\mathbf{V})$

**Demostración.** Se puede que  $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{0\}$  y que  $\mathbf{U} + \mathbf{U}^\perp = \mathbf{V}$

- a) Si  $u \in \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp$ , entonces  $u$  es ortogonal a sí mismo, luego  $g(u, u) = 0$  y; por lo tanto  $u = 0$
- b) Sea  $k = \dim(\mathbf{U})$

#### 2.2.1.4. Curvas

Se dice que  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  es una **curva** si existe un intervalo compacto  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  y una aplicación

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

continua tal que  $\alpha(I) = \Gamma$ . Los puntos  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$  son los extremos inicial y final de la curva; y el sentido va desde  $\alpha(a)$  hacia  $\alpha(b)$ . La función  $\alpha$  se llama parametrización de  $\Gamma$ .

En caso de que  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , se dice que la curva es cerrada; si  $\alpha$  es inyectiva sobre  $[a, b)$  (o  $\langle a, b]$ ) la curva se llama simple.

Una curva  $\Gamma$  se llama suave si admite una parametrización  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  derivable, siendo

$$\alpha'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$

el vector velocidad de la curva (o vector tangente a la curva), y

$$\|\alpha'(t)\| = \left[ \sum_{i=1}^n (x'_i(t))^2 \right]^{1/2}$$

la velocidad en el punto  $\alpha(I)$ .

Si  $\alpha$  es derivable salvo quizá en un número finito de puntos, la curva se llama suave a trozos. Llamándose camino a cualquier curva simple y suave a trozos.

### Funciones equivalentes

Dos funciones  $\alpha: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\beta: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  son equivalentes si existe una función  $\lambda: [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  biyectiva y continua tal que  $\beta \circ \lambda = \alpha$ . La función  $\lambda$  recibe el nombre de cambio de parámetro.

Dos funciones equivalentes representan parametrizaciones distintas de la misma curva y la función  $\lambda$  representa un cambio en la rapidez del movimiento.

- i. Si  $\lambda$  es creciente, se dice que las parametrizaciones  $\alpha$  y  $\beta$  conservan la orientación de la curva
- ii. Si  $\lambda$  es decreciente, las parametrizaciones  $\alpha$  y  $\beta$  invierten la orientación de la curva.

### Longitud de una curva

Si  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  es un camino parametrizado por  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se define su longitud por

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

### Parametrización por longitud de arco

La longitud de arco permite definir una parametrización “natural” de las curvas. Sea pues  $\Gamma$  una curva regular y  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización regular de  $\Gamma$ . Si llamamos  $L$  a la longitud de  $\Gamma$ , Se puede definir  $s: [a, b] \rightarrow [0, L]$  como

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$$

Claramente,  $s(a)=0$  y  $s(b)=L$ . Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral  $s'(t)=\|\alpha'(t)\|>0$ , de modo que  $s=s(t)$  es una función creciente y representa un cambio regular de parámetro. Se define entonces la parametrización  $\beta:[0, L]\rightarrow\mathbb{R}^n$  por  $\beta=\alpha\circ s^{-1}$  ( $s^{-1}=t$ ), la cual recibe el nombre de representación paramétrica intrínseca de la curva  $\Gamma$ .

Es fácil demostrar ahora que  $\|\beta'(s)\|=1, \forall s\in[0, L]$  (el vector tangente es unitario en todo el recorrido de la curva).

En efecto, como  $\beta=\alpha\circ s^{-1}=\alpha\circ t$ , entonces

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= (\alpha\circ t)'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) \\ &= \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t(s))\|}\end{aligned}$$

luego

$$\|\beta'(s)\|=1$$

#### 2.2.1.5. Referencia móvil de Frenet

Aguirre (2007), de la universidad Complutense de Madrid señala las siguientes definiciones y propiedades sobre curvas y referencias móviles de Frenet

Toda curva admite referencias móviles. Si sus  $n-1$  primeras derivadas (curvas vectoriales) son linealmente independientes, la curva se dice alabeada, propiedad que sobrevive a las reparametrizaciones

Una referencia móvil (a lo largo) de una curva  $\alpha:I\rightarrow E^n$  es un conjunto ordenado  $(E_1,\dots,E_n)$  de campos a lo largo de  $\alpha$  que, para cada  $t\in I$  da lugar a una base de  $T_{\alpha(t)}E^n$ . Y se dice que  $(E_1,\dots,E_n)$  es una referencia móvil euclídea de  $\alpha$  si,

para cada  $t \in I$ , esta base es ortonormal positiva, donde  $T_{\alpha(t)}E^n$  es el espacio vectorial tangente de  $E^n$  aplicado en  $\alpha(t)$ .

Una curva  $\alpha: I \rightarrow E^n$  ( $n \geq 2$ ) se dice alabeada en  $t_0 \in I$  si el conjunto de  $n-1$  vectores  $(\alpha'(t_0), \dots, \alpha^{(n-1)}(t_0))$  de  $T_{\alpha(t_0)}E^n$  es linealmente independiente; en tal caso,  $t_0$  posee un entorno de valores en  $I$  en los que  $\alpha$  es alabeada. Se dice que  $\alpha$  es alabeada si es alabeada en todo  $t \in I$ . Toda curva alabeada es regular. Aplicando repetidamente la regla de la cadena se comprueba que, para una curva, la propiedad de ser alabeada se mantiene bajo reparametrizaciones.

**En efecto.** Sea  $f: J \rightarrow I$  un cambio de parámetro de  $\alpha$  (por lo tanto  $\frac{df}{ds}$  no se anula nunca. Además se tiene  $(\alpha \circ f)'$ ,  $(\alpha \circ f)''$  son linealmente independientes si y solo si lo son  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ . Y así sucesivamente

**Referencia de Frenet.** Una referencia de Frenet de una curva  $\alpha: I \rightarrow E^n$  ( $n \geq 2$ ) es una referencia móvil euclídea  $(E_1, \dots, E_n)$  de  $\alpha$  que verifica

$$\text{Sub}(E_1, \dots, E_k) = \text{Sub}(\alpha', \dots, \alpha^{(k)}), \quad k = 1, \dots, n-1$$

**Teorema 2.6.** Sea  $\alpha: I \rightarrow E^n$  una curva. Entonces se tiene:

1. Si  $\alpha$  admite una referencia de Frenet, entonces necesariamente  $\alpha$  es alabeada.
2. Si  $\alpha$  es alabeada, entonces admite una referencia de Frenet, que puede definirse inductivamente de la siguiente forma:
  - a. Se define el campo  $E_1 \in X_\alpha$  como

$$E_1 = \frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_1|}, \quad \text{con } \varepsilon_1 = \alpha'$$

- b. Supuesto que se han definido  $(E_1, \dots, E_{k-1})$ , con  $k = 2, \dots, n-1$ , se define

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\varepsilon_k}{|\varepsilon_k|}, \text{ con } \varepsilon_k = \alpha^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{E}_i, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{E}_i$$

c. Supuesto que se ha definido  $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{k-1})$ , queda determinado un único  $\mathbf{E}_n$  tal que  $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$  es una referencia de Frenet de  $\alpha$ .

3. La referencia de Frenet de  $\alpha$  construida en el apartado 2 es la única que verifica además la siguiente propiedad:

$$\langle \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} \rangle > 0, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (2.1)$$

**Demostración.** Los apartados 1 y 2 son inmediatos. Probaremos 3. Obviamente la referencia  $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$  de Frenet de  $\alpha$  construida en 2 verifica (2.1), ya que, para  $k = 1, \dots, n-1$ , se tiene:

$$\langle \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} \rangle = \left\langle \mathbf{E}_k, \left( |\varepsilon_k| \mathbf{E}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{E}_i, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{E}_i \right) \right\rangle = |\varepsilon_k| > 0.$$

Sea  $(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$  otra referencia de Frenet de  $\alpha$  que verifica (2.1). Entonces necesariamente  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{F}_1$ . Fijemos  $k = 2, \dots, n-1$  y supongamos que  $\mathbf{E}_i = \mathbf{F}_i$  para cada  $i = 1, \dots, k-1$ ; de la definición de referencia de Frenet se tiene:

$$\begin{cases} \alpha^{(k)} = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{E}_i, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{E}_i, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{E}_i + \langle \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{E}_k \\ \alpha^{(k)} = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{F}_i, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{F}_i, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{F}_i + \langle \mathbf{F}_k, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{F}_k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\langle \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{E}_k = \langle \mathbf{F}_k, \alpha^{(k)} \rangle \mathbf{F}_k$$

al ser  $\mathbf{E}_k$  y  $\mathbf{F}_k$  unitarios y además  $\langle \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} \rangle$  y  $\langle \mathbf{F}_k, \alpha^{(k)} \rangle$  positivos, se deduce que  $\mathbf{E}_k = \mathbf{F}_k$ . Finalmente, suponemos que  $\mathbf{E}_i = \mathbf{F}_i$ , para cada  $i = 1, \dots, n-1$ ; se concluye que  $\mathbf{E}_n = \mathbf{F}_n$ .

### Observación 2.2.

1. Por lo que respecta al subconjunto  $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{n-1})$ , el método de construcción dado en el apartado 2 no es sino el método de ortonormalización de Schmidt aplicado a  $(\alpha', \dots, \alpha^{(n-1)})$ .
2. Se denomina a la única referencia de Frenet de  $\alpha$  que verifica la propiedad (1.1) **la referencia de Frenet de  $\alpha$** . En lo sucesivo, no se considerarán otras referencias de Frenet (hay en total  $2^{n-1}$ ) de  $\alpha$ .

#### 2.2.1.6. Fórmulas de Frenet. Curvaturas

Sea  $\alpha: I \rightarrow E^n$  una curva alabeada y sea  $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$  su referencia de Frenet. Si  $\mathbf{V}$  es un campo a lo largo de  $\alpha$ , se tiene:  $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{E}_i, \mathbf{V} \rangle \mathbf{E}_i$ ; en particular,  $\forall j = 1, \dots, n$ :

$$\frac{D\mathbf{E}_j}{dt} = \sum_{i=1}^n w_{ij} \mathbf{E}_i, \text{ con } w_{ij} = \left\langle \mathbf{E}_i, \frac{D\mathbf{E}_j}{dt} \right\rangle.$$

Ahora bien, se tiene,  $\forall j = 1, \dots, n$ :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_j \in \text{Sub}(\alpha', \dots, \alpha^{(j)}); \Rightarrow \frac{D\mathbf{E}_j}{dt} \in \text{Sub}(\alpha', \dots, \alpha^{(j+1)}); \Rightarrow w_{ij} = 0, \text{ si } i > j+1 \\ \langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle = cte, \forall i; \Rightarrow 0 = \frac{d\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle}{dt} = w_{ji} + w_{ij}, \forall i \end{cases}$$

Se deduce que las anteriores expresiones para las  $\frac{D\mathbf{E}_j}{dt}$  pueden escribirse en forma matricial:

$$\left( \frac{D\mathbf{E}_1}{dt}, \dots, \frac{D\mathbf{E}_n}{dt} \right) = (\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n) \begin{pmatrix} 0 & -w_{21} & \cdots & 0 \\ w_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -w_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & w_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

y se conoce por el nombre de **Fórmulas de Frenet**.

**Observación 2.3.** Se verifica:  $w_{i+1,i} > 0, i = 1, \dots, n-2$ . Únicamente  $w_{n,n-1}$  puede tener cualquier signo.



**En efecto.** Por definición, cualquier referencia de Frenet  $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$  de  $\alpha$  verifica,  
 $\forall i = 1, \dots, n$ :

$$\alpha^{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} \langle \mathbf{E}_j, \alpha^{(i)} \rangle \mathbf{E}_j + \langle \mathbf{E}_i, \alpha^{(i)} \rangle \mathbf{E}_i \equiv \mathbf{V}_{i-1} + \varphi_i \mathbf{E}_i \quad (*)$$

con  $\mathbf{V}_{i-1} \in \text{Sub}(\alpha', \dots, \alpha^{(i-1)})$  y  $\varphi_i \in F(I)$ ; de donde se deduce que

$$\alpha^{(i+1)} = \frac{D\mathbf{V}_{i-1}}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt} \mathbf{E}_i + \varphi_i \frac{D\mathbf{E}_i}{dt} \equiv \mathbf{W}_i + \varphi_i \frac{D\mathbf{E}_i}{dt} \quad (**)$$

con  $\mathbf{W}_i \in \text{Sub}(\alpha', \dots, \alpha^{(i)})$ .

Sea ahora  $i = 1, \dots, n-1$ . De (2.1) se deduce entonces que  $\varphi_i > 0$  y se tiene:

$$w_{i+1,i} = \left\langle \mathbf{E}_{i+1}, \frac{D\mathbf{E}_i}{dt} \right\rangle^{(**)} = \left\langle \mathbf{E}_{i+1}, \frac{1}{\varphi_i} \alpha^{(i+1)} \right\rangle^{(*)} = \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i};$$

y de ahí se sigue que:  $w_{i+1,i} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ .

Sea  $\alpha: I \rightarrow E^n$  una curva alabeada y sea  $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$  su referencia de Frenet. Con las notaciones del apartado anterior, se denomina **curvatura  $i$ -ésima** a la función diferenciable

$$\kappa_i = \frac{w_{i+1,i}}{|\alpha'|} \in F(I), \quad i = 1, \dots, n-1;$$

se sigue de la Observación 2.3 que  $\kappa_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ .

### Teorema fundamental de la teoría de curvas

El interés de las curvaturas de una curva alabeada, está en que son objetos invariantes; tanto bajo reparametrizaciones que preservan la orientación como bajo movimientos directos (Proposición 2.6), y en que determinan, salvo reparametrizaciones y movimientos la curva (Teorema 2.7)

**Proposición 2.6.** (Invariancia de las curvaturas) Sea  $\alpha: I \rightarrow E^n$  ( $n \geq 2$ ) una curva alabeada con referencia de Frenet  $(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$  y curvaturas  $\kappa_i \in F(I)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$

1. Sea  $f : J \rightarrow I$  un cambio de parámetro de  $\alpha$  que preserve orientación y consideremos la curva  $\tilde{\alpha} = \alpha \circ f : J \rightarrow E^n$ . Entonces la referencia de Frenet  $(\tilde{\mathbf{E}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{E}}_n)$  de  $\tilde{\alpha}$  verifica:

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i \circ f \quad (i=1, \dots, n)$$

Además, si  $\tilde{\kappa}_i \in F(I)$  es la curvatura  $i$ -ésima de  $\tilde{\alpha}$ , se tiene

$$\tilde{\kappa}_i = \kappa_i \circ f \quad (i=1, \dots, n-1).$$

2. Sea  $A : E^n \rightarrow E^n$  un movimiento directo y consideremos la curva  $\tilde{\alpha} = A \circ \alpha : I \rightarrow E^n$ . Entonces la referencia de Frenet  $(\tilde{\mathbf{E}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{E}}_n)$  de  $\tilde{\alpha}$  verifica:

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = (A\mathbf{E}_i)_\alpha \quad (i=1, \dots, n)$$

(siendo  $A$  la rotación de  $A$ ). Además, si  $\tilde{\kappa}_i \in F(I)$  es la curvatura  $i$ -ésima de  $\tilde{\alpha}$ , se tiene

$$\tilde{\kappa}_i = \kappa_i \quad (i=1, \dots, n-1)$$

**Observación 2.4.** Si el cambio de parámetro en el apartado 1 no preserva la orientación, se tendrá

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_1 = -\mathbf{E}_1 \circ f \text{ y } \tilde{\mathbf{E}}_2 = -\mathbf{E}_2 \circ f & (\text{para } n=2) \\ \tilde{\mathbf{E}}_1 = -\mathbf{E}_1 \circ f, \tilde{\mathbf{E}}_2 = -\mathbf{E}_2 \circ f \text{ y } \tilde{\mathbf{E}}_3 = -\mathbf{E}_3 \circ f & (\text{para } n=3) \end{cases}$$

y, en cuanto a las curvaturas,

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = -\kappa_1 \circ f & (\text{para } n=2) \\ \tilde{\kappa}_1 = \kappa_1 \circ f \text{ y } \tilde{\kappa}_2 = \kappa_2 \circ f & (\text{para } n=3) \end{cases}$$

**Teorema 2.7** (Teorema fundamental de la teoría de curvas) Dadas funciones diferenciales  $\kappa_i \in F(I)$  ( $i=1, \dots, n-1$ ), con  $\kappa_i > 0$  para  $i=1, \dots, n-2$ , existe una única (salvo movimientos directos) curva alabeada  $\alpha : I \rightarrow E^n$  parametrizada por longitud de arco y con curvaturas  $\kappa_i$  ( $i=1, \dots, n-1$ ).

### 2.2.1.7. Superficies

Las siguientes definiciones, propiedades y teoremas son tomados de Arrieta (2006) de la Universidad distrital Federico José de Caldas, Bogotá.

**Definición 2.18** Una representación paramétrica de clase  $C^\infty$  de un conjunto de puntos  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  es una función  $x = x(u, v)$  de un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $M$ , tal que

- a.  $x$  es de clase  $C^\infty$  en  $U$ ,
- b. Si  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  y

$$x(u, v) = x_1(u, v)e_1 + x_2(u, v)e_2 + x_3(u, v)e_3,$$

Entonces para todo  $(u, v) \in U$  se tiene:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

Se recuerda que  $x$  es de clase  $C^\infty(U)$ , si todas sus derivadas parciales existen y son continuas en  $U$  y el rango de la matriz es el orden del menor, no nulo, más grande de la matriz. De esta forma, el rango de la matriz anterior es 2, si y solo si uno de los siguientes:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

es no nulo.

A las variables  $u$  y  $v$  se les denomina parámetros. Además, se denota una representación paramétrica mediante  $x = x(u, v)$  y sus derivadas parciales con los símbolos:

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad x_{uv} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad \dots$$

**Proposición 2.7** Sea  $U$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $x = x(u, v)$ , es una parametrización regular de  $U$  sobre  $M$  si y sólo si:

- a.  $x$  es de clase  $C^\infty$  en  $U$
- b.  $x_u \times x_v \neq 0, \forall (u, v) \in U$

**Demostración**

$$\begin{aligned} x_u \times x_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} e_3 - \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} e_1 \end{aligned}$$

Las componentes de  $x_u \times x_v$  difieren de los menores de orden  $2 \times 2$  de la matriz jacobiana para  $x$ , a lo sumo en un signo; por lo tanto el rango de la matriz jacobiana de  $x$  es dos si y sólo si  $x_u \times x_v \neq 0$ . Lo que demuestra la proposición.

Es necesario observar que una representación paramétrica regular de clase  $C^\infty$  puede solamente cubrir una parte de la superficie que se desea estudiar.

**Definición 2.19 Parametrización local.** Sea  $U$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$ , y  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ , la función

$$\alpha: U \rightarrow M, \text{ o el par } (U, \alpha)$$

se llama una parametrización local de  $M$  si

- a.  $\alpha$  es de clase  $C^\infty(U)$
- b.  $\alpha$  es un homeomorfismo. Esto es  $x$  es inyectiva, continua con inversa continua.

$$c. \quad \alpha_u \times \alpha_v \neq 0, \quad \forall (u, v) \in U.$$

$\alpha(U)$  recibe el nombre de *Vecindad Coordinada*.

La condición (c), es equivalente a que  $d\alpha$  es uno a uno en cada punto  $p \in U$ . Ya que para  $\alpha = (x, y, z)$  la  $d\alpha_p$  es uno a uno, si y sólo si los vectores columna de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Son linealmente independientes (imagen directa e inversa de una transformación lineal uno a uno), equivalente, a que el producto vectorial.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \times \frac{\partial \alpha}{\partial v} \neq 0$$

**Lema 2.1** Sean  $U$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$  y  $\alpha: U \rightarrow M$  una función. Entonces  $\alpha$  es una parametrización local de  $M$  si y sólo si

- $\alpha$  es de clase  $C^\infty(U)$
- $\alpha$  es un homeomorfismo. Esto es,  $\alpha$  es inyectiva, continua con inversa continua.
- La diferencial de  $\alpha$  es uno a uno para todo  $(u, v) \in U$ .

**Definición 2.20 Superficie regular.** Se dice que un conjunto  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si cada punto  $p \in M$  existe un conjunto abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  y una parametrización  $\alpha: U \rightarrow V \cap M$  de un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap M \subseteq \mathbb{R}^3$  tal que (ver figura 1)

- $\alpha$  es de clase  $C^\infty(U)$
- $\alpha$  es un homeomorfismo.
- Para cada  $q$ , la diferencial  $d\alpha_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es uno a uno.

Es decir, un conjunto  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si cada punto  $p \in M$  admite una parametrización local de clase  $C^\infty$ .

$$\alpha(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

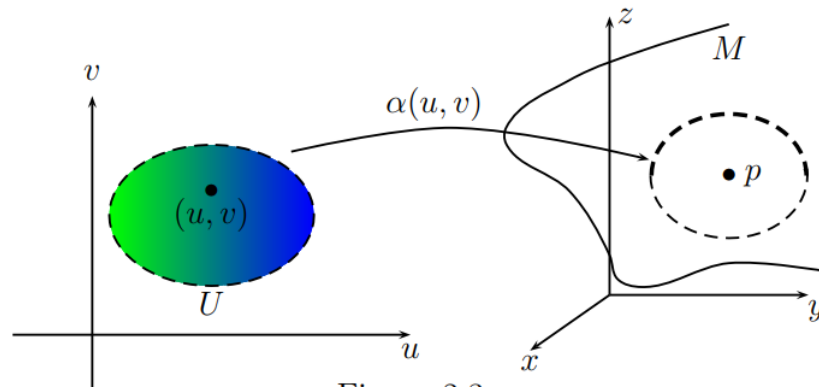


Figura 1 Superficie regular.  
Fuente. Arrieta, C (2006)

**Observación 2.5.** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , entonces la gráfica de  $f$ , esto es, el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$M = \{(u, v, f(u, v)), \forall (u, v) \in U\}$$

es una superficie regular.

**En efecto,** la función  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$x(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

es una parametrización de la gráfica de  $f$ . Además, su vecindad coordenada cubre cualquier punto de  $M$ .

- La condición (a) se satisface inmediatamente.
- La condición (c) no es difícil ya que  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$ , es decir  $x_u \times x_v \neq 0$
- Finalmente  $x$  claramente es 1 – 1 y continua. Como  $x^{-1} : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}^2$  está dado por

$$x^{-1}(u, v, f(u, v)) = (u, v)$$

es uno a uno. También es la restricción a  $M$  de la función continua  $\pi(u, v, w) = (u, v)$ , por lo tanto  $x^{-1}$  es continua y uno a uno.

**Lema 2.2** Sea  $p$  un punto de una superficie regular y sea  $\alpha: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función con  $p \in \alpha(U)$  que satisface las condiciones (a) y (c) de la definición de superficie regular. Si  $\alpha$  es inyectiva, entonces  $\alpha^{-1}$  es continua.

**Demostración.** Se escribe

$$\alpha(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

y sea  $q \in U$ , por las condiciones (a) y (c), se puede admitir, intercambiando los ejes coordenados si es necesario, que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

Sea  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . Entonces

$$\pi \circ \alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ y}$$

$$J(\pi \circ \alpha) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

y por el teorema de la función inversa, se obtiene vecindades  $V_1$  de  $q$  en  $U$  y  $V_2$  de  $\pi \circ \alpha(q)$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\pi \circ \alpha: V_1 \rightarrow V_2$  es un difeomorfismo sobre  $V_2$ .

Se asume que  $\alpha$  es inyectiva. Entonces restringiendo a  $\alpha(V_1)$  y como:

$$\alpha^{-1} = (\pi \circ \alpha)^{-1} \circ \pi,$$

entonces  $\alpha^{-1}$  es continua como composición de funciones continuas. Como  $q$  es arbitrario,  $\alpha^{-1}$  es continua en  $\alpha(U)$ .

### 2.2.1.8. Superficie regular de dimensión $k$ o $k$ – superficie

El concepto de superficie regular admite, sin ningún tipo de complicación, una generalización a dimensiones más altas, pero aun manteniendo un espacio ambiente.

**Definición 2.21** *Un subconjunto  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  es una superficie regular de dimensión  $k$  o simplemente una  $k$ -superficie regular si para cada punto  $p \in M$ , existe un conjunto abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^n$  y una función*

$$x: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow V \cap M,$$

*De un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$  en  $V \cap M$  tales que*

- a.  $x$  es un homeomorfismo diferenciable;*
- b. La diferencial,  $(dx)_q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es inyectiva para todo  $q \in U$ .*

El par  $(U, x)$  recibe el nombre de parametrización de  $M$  alrededor de  $p$ ; como también a  $x(U)$  se le dice una vecindad coordenada de  $p$ .

**Observación 2.6** Sea  $M$  una  $k$ -superficie y  $p \in M$ .

- a. En la práctica, se dice que  $(U, x)$  es una parametrización de  $M$  en  $p$  indicando las coordenadas de  $U$  en  $\mathbb{R}^k$  que se van a usar; por ejemplo,  $(U, x)$  es una parametrización de  $M$  en  $p$  con coordenadas  $x_1, \dots, x_k$ .
- b. Como cada punto de esta vecindad coordenada de  $M$ , entonces existe una familia de parametrizaciones  $F = \{(U_i, \phi_i)\}$ , tal que

$$\bigcup_i \phi_i(U_i) = M$$

y a la familia  $F$  se le conoce con el nombre de **Estructura diferencial** para  $M$ .

**Observación 2.7** La imagen de una función diferenciable es una  $k$ -superficie regular.



**En efecto**, sea  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^k$  y  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable. Entonces la imagen de  $f$  es el conjunto:

$$\text{Im}(f) = \{(x_1, \dots, x_k, f_1(x), \dots, f_m(x)) : x = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega\}$$

y como se observa  $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \text{Im}(f)$  dada por

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, f_1(x), \dots, f_m(x))$$

es diferenciable con inversa diferenciable y  $\varphi(\mathbb{R}^k) = \text{Im}(f)$ . Esto es  $\text{Im}(f)$  es una  $k$ -superficie regular con una sola parametrización.

**Teorema 2.8 (Cambio de parámetro)** Sea  $p$  un punto de una  $k$ -superficie regular  $M$ , y sean  $x: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$ ,  $y: V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$  dos parametrizaciones de  $M$  en  $p$  tal que  $p \in x(U) \cap y(V) = W$ . Entonces el cambio de coordenadas

$$h = y^{-1} \circ x: x^{-1}(W) \rightarrow y^{-1}(W)$$

es un difeomorfismo. Esto es,  $h$  es diferenciable y tiene función inversa  $h^{-1}$  diferenciable.

De esta forma  $x = y \circ h$  e  $y = x \circ h^{-1}$ .

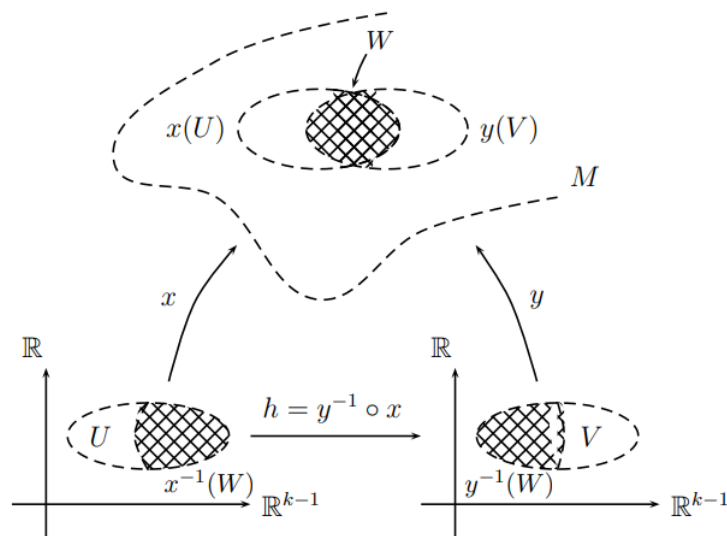


Figura 2. Cambio de parámetro en una  $k$ -superficie  
Fuente Arrieta, C (2006)

**Demostración.** Es una aplicación del teorema de la función inversa. En efecto,  $h = y^{-1} \circ x$  es un homeomorfismo, ya que es compuesta de dos homeomorfismos. Situación que no se puede concluir, por argumento análogo, que  $h$  sea diferenciable, ya que  $y^{-1}$  no necesariamente está definida en un subconjunto abierto de algún  $\mathbb{R}^N$  y aún no se conoce cuál es el significado de una función diferenciable sobre  $M$ .

El procedimiento es como se muestra a continuación. Sean  $r \in x^{-1}(W)$  y  $q = h(r)$ . Si

$$(u_1, \dots, u_k) \in V \subseteq \mathbb{R}^k, \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

y sea

$$y(u_1, \dots, u_k) = (v_1(u_1, \dots, u_k), \dots, v_n(u_1, \dots, u_k))$$

una parametrización de  $M$ , entonces la diferencial de  $y$  en cualquier punto de su dominio tiene rango  $k$  y por lo tanto, se puede asumir, renombrando los ejes si es necesario, que

$$\frac{\partial(v_1, \dots, v_k)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(q) \neq 0.$$

Se extiende  $y$  a la función  $F : V \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por (por comodidad se escribe  $u = (u_1, \dots, u_k)$ ):

$$F(u_1, \dots, u_k, t_{k+1}, \dots, t_n) = (v_1(u), \dots, v_k(u), v_{k+1}(u) + t_{k+1}, \dots, v_n(u) + t_n),$$

donde  $(u_1, \dots, u_k) \in V$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$ . Es claro que  $F$  es diferenciable y que la restricción

$$F|_{V \times \{0\}} = y$$

Y por cálculo simple, se obtiene

$$\det dF_q = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial u_k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_k}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial v_k}{\partial u_k} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial v_{k+1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial v_{k+1}}{\partial u_k} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial v_n}{\partial u_k} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_q = \frac{\partial(v_1, \dots, v_k)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(q) \neq 0$$

En estas condiciones es posible entonces aplicar el teorema de la función inversa, que garantiza la existencia de un par de conjuntos abiertos  $V_1$  de  $y(q)$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $V_2$  de  $q \times 0$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F$  es un difeomorfismo.

Por la continuidad de  $x$ , existe un conjunto abierto  $U_1$  de  $r \in V$  tal que  $x(U_1) \subseteq V_1$ . Nótese que, sobre  $U_1$ ,  $h|_{U_1} = F^{-1} \circ x|_{U_1}$  es una composición de funciones diferenciales. De esta manera, se puede aplicar la regla de la cadena para concluir que  $h$  es una función diferenciable en  $r$ : Como  $r$  es arbitrario, entonces  $h$  es diferenciable sobre  $x^{-1}(W)$ .

El mismo argumento se puede aplicar para demostrar que  $h^{-1}$  es una función diferenciable y así  $h$  es un difeomorfismo.

**Observación 2.8** Sea  $M$  una  $k$ -superficie contenida en  $\mathbb{R}^n$  y  $F = \{(U_i, \varphi_i)\}$  una estructura diferenciable sobre  $M$ .

- a. Si  $(U_i, \varphi_i)$  y  $(U_j, \varphi_j)$  son elementos de  $F$  con  $p \in \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = W$ , entonces el teorema de cambio de parámetro dice que

$$h = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \varphi_i^{-1}(W) \rightarrow \varphi_j^{-1}(W)$$

es un difeomorfismo. Es decir, si las coordenadas de  $(U_i, \varphi_i)$  y  $(U_j, \varphi_j)$  son  $x_1, \dots, x_k$  y  $y_1, \dots, y_k$  respectivamente, entonces  $h$  se representa por las funciones

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, \dots, x_k) \\ &\vdots \\ y_k &= y_k(x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

y para cada  $q$  en el dominio de  $h$ ,

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} \neq 0$$

- b. La prueba del teorema de cambio de parámetro, garantiza que para cada una de las parametrizaciones  $(U_i, \varphi_i)$ , existe un subconjunto abierto de la forma  $U_i \times \mathbb{R}^{n-k}$  del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  y una función  $F_i : U_i \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $F_i$  es un difeomorfismo de una vecindad abierta de  $\varphi_i^{-1}(p) \in U_i \times \mathbb{R}^{n-k}$  sobre una vecindad abierta de  $p \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $F_i|_{U_i} = \varphi_i$ . Lo que indica que cada  $\varphi_i^{-1}$  es diferenciable.
- c. A la familia  $\{(V_i, \psi_i)\}$ , donde  $V_i = \varphi_i(U_i)$  y  $\psi_i = \varphi_i^{-1}$ , se denomina un **atlas** para  $M$  y al par  $(V_i, \psi_i)$  una **carta**.
- d. En general se puede trabajar con atlas o estructura diferenciable, o bien con parametrizaciones o cartas, siempre que exista la suficiente claridad de la forma como se desea trabajar.

#### 2.2.1.9. Superficies obtenidas por valores regulares

**Definición 2.21.** Una función diferenciable

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definida en un conjunto abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice que tiene en  $p \in A$  un punto crítico si  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  no es sobreyectiva. La imagen  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de un punto crítico se llama valor crítico. Un punto de  $\mathbb{R}^m$  se dice valor regular si no es un valor crítico.

Si  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable y  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , entonces la diferencial  $df_p$  aplicada al vector  $e_i = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$  se obtiene calculando el vector tangente en  $f(p)$  a la curva

$$x_i \rightarrow f(p_1, \dots, p_{i-1}, x_i, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

y entonces

$$df_p(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Se concluye que la matriz asociada con  $df_p$  relativa a la base

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

es dado por

$$df_p = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_p$$

Nótese, por lo menos en este caso, que la  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  no es sobreyectiva es equivalente a que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$$

Por lo tanto,  $a \in f(A)$  es un valor regular de  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0, \text{ para algún } i = 1, \dots, n$$

en cada uno de los puntos de la imagen inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : f(x_1, \dots, x_n) = a\}$$

De igual manera, si  $f = (f_1, \dots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $a \in A$  es un valor regular de  $f$  (con lo que  $n \geq m$ ),  $p \in f^{-1}(a)$  e indicado con

$$q = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n=m+k},$$

entonces si  $a$  es un valor regular de  $f$  implica  $df_p$  es sobreyectiva, con lo que se puede suponer (haciendo una reordenación de las variables si es necesario) que

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(p) \neq 0,$$

ya que el rango de la diferencial de  $f$  en  $p$  es  $m$ .

**Teorema 2.9** Si  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función diferenciable y  $a \in f(A)$  es un valor regular de  $f$ , entonces  $f^{-1}(a)$  es una superficie regular de dimensión  $k = n - m$ .

**Demostración.** Sea  $p \in f^{-1}(A)$ . Se hace la siguiente notación

$$x = (x_1, \dots, x_k), \quad y = (y_1, \dots, y_m), \quad a = (a_1, \dots, a_m)$$

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$$

y  $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_m(x, y))$  denota a la función  $f$ .

Como  $a$  es un valor regular de  $f$ , se asume, reordenando los ejes si es necesarios, que

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(p) \neq 0$$

en  $p$ . Se define la función  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  por

$$F(x, y) = (x_1, \dots, x_k, f_1(x, y), \dots, f_m(x, y)),$$

entonces

$$\det(dF_p) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(p) \neq 0$$

El teorema de la función inversa garantiza la existencia de conjuntos abiertos  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $F(p)$  tal que  $F:U \rightarrow V$  es un difeomorfismo. Y se sigue que  $F^{-1}:V \rightarrow U$  también es un difeomorfismo y tiene la forma

$$F^{-1}(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m) = (x_1, \dots, x_k, g(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m))$$

Donde  $(x, t) = (x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m) \in V$  y

$$g(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m) = (g_1(x, t), \dots, g_m(x, t))$$

Se denota la función proyección de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^k$  por  $\pi$ , esto es  $\pi(x, y) = x$ .

Ahora, cualquier punto  $(x, y) \in f^{-1}(a) \cap U$  tiene la forma

$$\begin{aligned} (x, y) &= F^{-1} \circ F(x, y) = F^{-1}(x_1, \dots, x_k, f(x, y)) \\ &= F^{-1}(x, a) = (x, g(x, a)) \end{aligned}$$

con  $x$  en el abierto  $\pi(U)$  de  $\mathbb{R}^k$ . Sea  $h(x) = g(x, a)$ , entonces

$$f^{-1}(a) \cap U = \{(x, h(x)) : x \in \pi(U)\} = \text{graf } h \cap U$$

Lo que muestra que  $f^{-1}(a) \cap U$  es una carta local de  $p$ , por ser la gráfica de una función diferenciable y por lo tanto cualquier punto  $p \in f^{-1}(a)$  se puede cubrir con una carta local; así  $f^{-1}(a)$  es una superficie regular.

### 2.2.1.10. Funciones diferenciables entre superficies

En esta sección se extiende la noción de funciones diferenciables a superficies regulares.

**Definición 2.23** Sean  $M^m$  y  $N^n$  superficies regulares. Entonces una función  $f : M \rightarrow N$  se dice diferenciable en  $p \in M$  si para cada parametrización  $(U_j, \varphi_j)$  en  $f(p)$ , existe una parametrización  $(U_i, \varphi_i)$  en  $p$  tal que  $f(\varphi_i(U_i)) \subseteq \varphi_j(U_j)$  y la función

$$\varphi_j^{-1} \circ f \circ \varphi_i : U_i \rightarrow U_j$$

es una función diferenciable.

La función  $\varphi_j^{-1} \circ f \circ \varphi_i$  recibe el nombre de expresión de  $f$  en coordenadas respecto a las parametrizaciones  $(U_i, \varphi_i)$  y  $(U_j, \varphi_j)$ ; su dominio es el conjunto  $U_i$ .

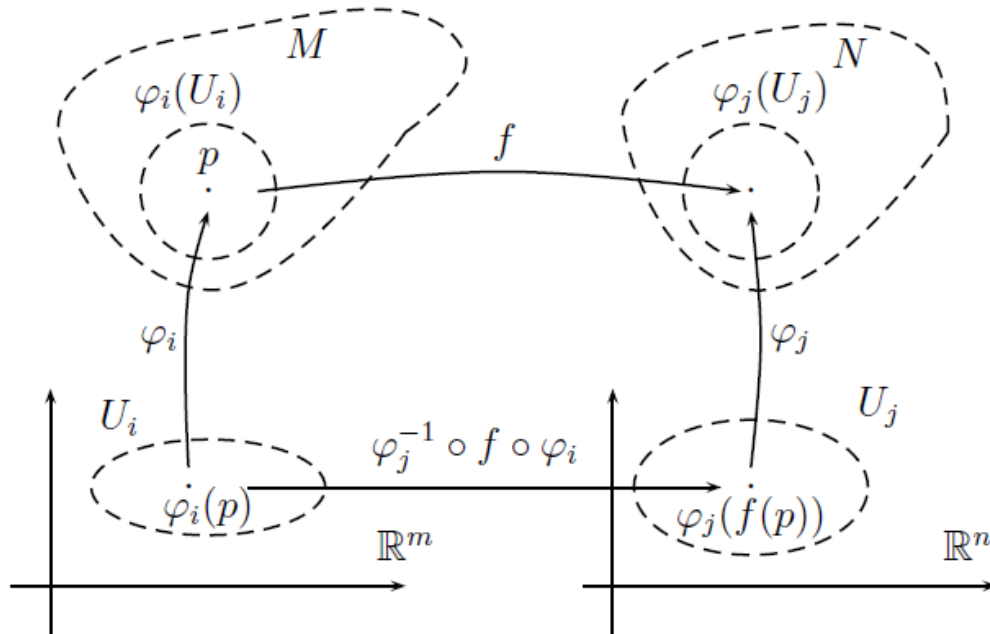


Figura 3. Función diferenciable entre superficies  
Fuente Arrieta, C (2006)



Esta definición está bien hecha ya que es independiente del sistema de coordenadas escogidas para  $p$  y  $f(p)$ . En efecto, sean  $(U'_i, \phi'_i)$  y  $(U'_j, \phi'_j)$  otras parametrizaciones con  $p \in \phi'_i(U'_i)$  y  $f(\phi'_i(U'_i)) \subseteq \phi'_j(U'_j)$ . Entonces

$$\phi_j'^{-1} \circ f \circ \phi_i' = (\phi_j'^{-1} \circ \phi_j') \circ (\phi_i'^{-1} \circ f \circ \phi_i') \circ (\phi_i^{-1} \circ \phi_i')$$

Es compuesta de funciones diferenciables. Por lo tanto,  $\phi_j' \circ f \circ \phi_i'^{-1}$  es diferenciable.

Sean  $M$  y  $N$  superficies regulares de la misma dimensión. Entonces una función biyectiva  $f: M \rightarrow N$  tal que  $f$  y  $f^{-1}$  son funciones diferenciables, se llama un difeomorfismo y las dos superficies se dicen difeomorfas si existe un difeomorfismo de una a la otra; las superficies son necesariamente de la misma dimensión.

#### 2.2.1.11. Vectores tangentes sobre superficies regulares

Sea  $M^m$  una superficie regular y  $U$  un abierto en  $M$ , entonces el conjunto de todas las funciones de clase  $C^\infty$  definidas sobre  $U$ ,  $C^\infty(U)$ , es un algebra conmutativa sobre  $\mathbb{R}$  con las operaciones de suma, producto por escalar y producto entre funciones y se denota por  $C^\infty(U)$ .

Sea ahora  $\alpha: \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \rightarrow M$  una curva diferenciable, llamada una curva diferenciable sobre  $M$ . Se supone que  $\alpha(0) = p \in M$ , el vector *tangente a la curva*  $\alpha$  en  $t=0$ , y por lo tanto a  $M$ , es la función (realmente operador diferencia)  $\alpha'(0): C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0}$$

Un *vector tangente* en  $p \in M$  es el vector tangente en  $t=0$  de alguna curva  $\alpha: \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ . El conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  se denota con  $T_p M$ .

Se espera pues, que se mantengan las propiedades observadas en caso de  $\mathbb{R}^k$ ; en efecto, se escoge una parametrización  $(U, x)$  en  $p = x(0)$ , y se puede entonces expresar la curva  $\alpha$  y la función  $f$  en términos de esta parametrización, para  $q = (x_1, \dots, x_k) \in U$

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$$

Por lo tanto, usando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ x(x_1(t), \dots, x_k(t))) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^k x'_i(0) \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i} \Big|_0 \end{aligned}$$

de donde, tomando el operador

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x}{\partial x_i} \Big|_0 : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

Donde  $F = f \circ x$ , se puede escribir

$$\alpha'(0)f = \sum_{i=1}^k x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \left[ \sum_{i=1}^k x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right](f)$$

de donde

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^k x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.3}$$

### Observaciones 2.9

- i. El vector  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  es el vector tangente en  $p \in M$  a la curva coordenada (ver Figura 4)

$$x_i \rightarrow x(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$$

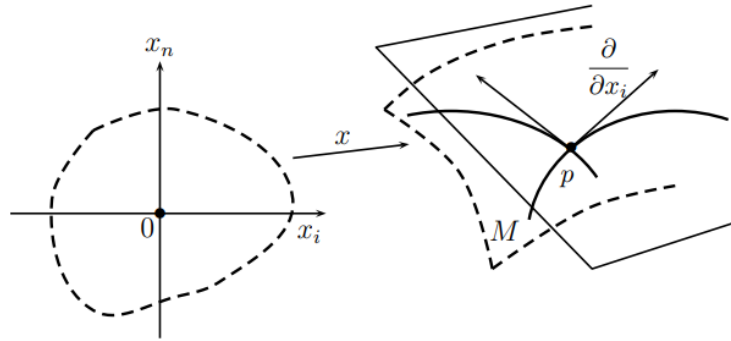


Figura 4. Vectores tangentes sobre una superficie regular  
Fuente Arrieta, C (2006)

- ii. La expresión (2.3) demuestra que el vector tangente a una curva  $\alpha$  en  $p$  sólo depende de las derivadas de un sistema de coordenadas.
- iii. La expresión (2.3) también demuestra que el conjunto  $T_p M$ , con las operaciones usuales entre funciones, forma un espacio vectorial.
- iv. Al escoger una parametrización  $(U, x)$  alrededor de  $p \in M$ , inmediatamente se determina un conjunto de vectores tangentes en  $p$ ,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\}$$

que generan a  $T_p M$ . Este conjunto resulta también linealmente independiente, para ver esto, basta tomar una combinación lineal igualada a cero y hacerla actuar sobre cada función coordenada para obtener que los coeficientes de dicha combinación son todos nulos. Por lo tanto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\}$$

forma una base para  $T_p M$ .

- v. Es inmediato que la estructura lineal de  $T_p M$  no depende de la parametrización  $x$ .
- vi. También se observa que (2.3) proporciona las características naturales de que cada vector tangente es un operador diferencial de  $C^\infty(U)$  en  $\mathbb{R}$ .

#### 2.2.1.12. Superficies orientables

Dos sistemas de coordenadas  $(x_i), (y_i)$  en  $\mathbb{R}^n$  se dicen **consistentemente orientados** o simplemente **consistentes** si el Jacobiano del cambio de parámetro

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

Es positiva en donde esté definido.

**Definición 2.24.** Una  $k$ -superficie regular se dice **orientable** si posee una estructura tal que para cualquier par de parametrizaciones  $(U, x), (V, y)$  en donde  $x(U) \cap y(V) = W \neq \emptyset$ , los sistemas de coordenadas asociados  $(x_i), (y_i)$  son consistentes, es decir, la función de cambio de coordenadas

$$y^{-1} \circ x : x^{-1}(W) \rightarrow y^{-1}(W)$$

tal que  $(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (y_1, \dots, y_k)$  se verifica que

$$\det d(y^{-1} \circ x) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} > 0$$

en cada punto  $x^{-1}(W)$ .

Dos estructuras diferenciales tal que cualquier parametrización de la primera estructura se relaciona por un determinante jacobiano negativo con cualquier parametrización de la otra, se dice que tiene orientación opuesta para la superficie. Una estructura consistentemente orientada se puede obtener de un atlas con orientación opuesta cambiando el signo de una coordenada en particular, por

ejemplo, cambiando el signo en la primera coordenada en cada sistema de coordenadas o tomando una permutación impar en cada sistema.

El teorema que sigue demuestra que, toda  $n$  – superficie orientable implica que para cada cualquier par de parametrizaciones  $(U_1, x)$ ,  $(U_2, y)$  el determinante jacobiano del cambio de parámetro tiene el mismo signo sobre toda la intersección  $U_1 \cap U_2$ . Situación que resulta de gran utilidad para demostrar que algunas variedades no son orientables.

**Teorema 2.10** Sea  $M$  una  $k$  – superficie orientable, entonces para todo par de parametrizaciones  $(U_1, x)$  y  $(U_2, y)$  de  $M$  con coordenadas  $(x_i)$ ,  $(y_i)$ , respectivamente,  $U_1$  y  $U_2$  conexos,  $x(U_1) \cap y(U_2) = W \neq \emptyset$ , implica que

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}$$

tiene el mismo signo sobre  $x^{-1}(W)$ .

**Demostración.** Como  $U_1$  y  $U_2$  heredan la orientación de  $M$ , entonces existe una estructura diferenciable  $(V_i, \psi_i)$  sobre  $U_1$  para el cual el determinante jacobiano es positivo sobre la intersección de cualquier par de cartas. Entonces según  $U_1$ , que es conexo, es o no consistentemente orientado con el atlas  $\{(V_i, \psi_i)\}$

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)}$$

es mayor o menor que cero en cada punto de  $U_1$  y en particular, en cada punto  $U_1 \cap U_2$  donde  $(z_i)$  son las funciones de coordenadas para la parametrización  $(V_i, \psi_i)$  apropiada a los puntos en asunto. De la misma forma,

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)}$$

es mayor o menor que cero en cada punto de  $U_1 \cap U_2$  de acuerdo con  $(U_2, y)$  sea consistente o de orientación opuesta a la estructura diferenciable  $(V_i, \psi_i)$ . Como

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)} \cdot \frac{\partial(x_1, \dots, x_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)}$$

Entonces que

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}$$

es positiva sobre  $U_1 \cap U_2$  si  $(U_1, x)$  y  $(U_2, y)$  son ambos consistentemente orientados o ambos opuestamente orientados a  $(V_i, \psi_i)$ ; será negativo sobre  $U_1 \cap U_2$  si la orientación  $(U_1, x)$  y  $(U_2, y)$  con respecto a  $(V_i, \psi_i)$  son diferentes.

#### 2.2.1.13. Primera forma cuadrática fundamental

Sea  $M$  una 2 – superficie, se restringe el trabajo a una vecindad coordenada  $(U, x)$  de  $M$ . Así que  $x(u, v)$  con  $(u, v) \in U$ ; y se considera la curva  $\Gamma$  sobre  $M$  definida por la imagen bajo  $x$  de

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad \text{con } t \in J = [a, b]$$

a lo largo de la curva  $\Gamma$ ,  $x$  es una función de  $t$ , es decir,  $\Gamma$  es de la forma

$$r(t) = x(u(t), v(t)),$$

con  $t$  en el intervalo  $J$ .

La longitud de arco  $s = s(t)$  está relacionado con el parámetro  $t$  ( $t$  en el interior de  $J$ ) por la formula

$$s = \int_{t_0}^t \|r'(t)\| dt, \quad a < t_0 < t$$

Aunque  $r'(t) \in T_{r(t)}M$ , se puede usar el producto interior del ambiente,  $\mathbb{R}^3$ , para obtener entonces

$$\begin{aligned} ds^2 &= \|r'(t)\|^2 = \langle r'(t), r'(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv, \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du du + 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle du dv + \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle dv dv \end{aligned}$$

haciendo

$$E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, \quad F = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \quad G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

y escribiendo  $A^2 = A \cdot A$ , entonces

$$I = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

recibe el nombre de primera forma cuadrática fundamental.

### Observación 2.10

1. La primera forma cuadrática fundamental se puede escribir

$$I = ds^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

la matriz

$$F_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a  $I$

2. La primera forma cuadrática fundamental es definida positiva, En efecto, como

$$ds^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

y como los puntos de la superficie  $M$  son regulares, se tiene

$$E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle > 0, \quad G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle > 0,$$

entonces por la igualdad de Lagrange implica que

$$|F_1| = EG - F^2 = \left\| \frac{\partial}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial}{\partial v} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle^2 = \left\| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right\|^2 > 0$$

y el criterio de Sylvester, en Algebra Lineal, asegura que la primera forma cuadrática fundamental es positiva.

3.  $ds^2$  es invariante bajo un cambio de parámetro.

Es una aplicación a la regla de la cadena en la forma cuadrática al hacer el cambio de variable. En efecto, sea  $M$  una superficie y  $x(u, v)$  un sistema de coordenadas locales. Si se realiza el cambio de parámetros  $u = u(\alpha, \beta)$ ,  $v = v(\alpha, \beta)$ , entonces la forma cuadrática fundamental en los parámetros  $\alpha, \beta$  satisface (para simplificar, por un momento, se denotará  $A^2 = \langle A, A \rangle$ ):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \tilde{E}d\alpha^2 + 2\tilde{F}d\alpha d\beta + \tilde{G}d\beta^2 \\ &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta, \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta \right\rangle \\ &= \left( \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) d\beta \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta} d\beta \right) \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right\rangle \\ &= Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $ds^2$  es invariante bajo cambio de parámetros.



4. La distancia entre  $p = x(u(t_0), v(t_0))$  y  $q = x(u(t), v(t))$  sobre la curva  $\Gamma$  puede expresarse de la forma siguiente:

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

5. Sea  $M$  una 2 –superficie, se supone que la vecindad coordenada  $(U, x)$  de  $M$ , tal que  $\overline{x(U)} = M$ . Por lo tanto,

$$\text{Area}(M) = \iint_U \left\| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right\| du dv = \iint_U \sqrt{EG - F^2} du dv$$

por lo tanto, el elemento de área, está dado por

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

6. El vector normal exterior a la superficie  $N = N(u, v)$  o función de Gauss está dada por

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|},$$

lo que equivale a,

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

#### 2.2.1.14. Segunda forma cuadrática fundamental

En esta sección se supone que  $M$  es una 2 –superficie regular y que  $(U, r)$  es una parametrización alrededor de  $p \in M$ ,  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^2$  con lo que

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

y el vector unitario normal a  $M$ , llamada función de Gauss, está dado por

$$N = N(p) = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$$

La geometría de  $M$  depende de las formas cuadráticas fundamentales de las cuales ya se ha dado la primera que se representa con  $ds^2$ . La *segunda forma cuadrática fundamental* puede obtenerse dando sobre  $M$  una curva  $\Gamma$  que pase por el punto  $p$  y tomando el vector de curvatura de  $\Gamma$  en  $p$ . Si la curva  $\Gamma$  viene dada cuando  $u = u(s)$  y  $v = v(s)$  donde  $s$  es el parámetro longitud de arco, entonces se puede representar a  $\Gamma$  sobre  $M$  por

$$r(s) = r(u(s), v(s)), \quad s \in J = [0, l]$$

Si  $t$  es un vector tangente unitario de  $\Gamma$ , es decir,

$$t = r' \in T_{r(s)}M,$$

entonces en cada punto  $p \in M$ ,  $r'' \in \mathbb{R}_p^3$  y como  $\{r', N, N \times r'\}$  forma una base ortonormal (o simplemente, un referencial ortonormal) para  $\mathbb{R}_p^3$ , entonces existen escalares  $k_n$ ,  $k_g$  y  $\alpha$  tales que

$$r'' = k_n N + k_g (N \times r') + \alpha r'$$

La componente normal  $k_n$  recibe el nombre de curvatura y la componente tangencial  $k_g$  recibe el nombre de curvatura tangencial o geodésica, mientras que el vector de curvatura es  $K = r''$ . Al tomar producto interior en ambos miembros de la igualdad, se obtiene que  $\alpha = 0$ , y así

$$r'' = k_n N + k_g (N \times r') + \alpha r'$$

Lo que muestra que  $r''$  está en el plano generado por los vectores  $\{N, N \times r'\}$ ; de igual manera tomando en esta última ecuación producto interno por  $N$  y  $N \times r'$ , se obtiene

$$k_n = \langle r'', N \rangle \quad \text{y} \quad k_g = \langle r'', N \times r' \rangle$$

el vector curvatura  $K$  en  $p$  es igual a  $\frac{dt}{ds} = r''$ . Al descomponer  $K$  en una componente  $K_n$  normal y otra componente  $K_g$  tangente a la superficie (figura 5) se obtiene que  $K = K_n + K_g$  donde

$$K_n = k_n N \quad \text{y} \quad K_g = k_g (N \times r') \quad (2.4)$$

éstos reciben el nombre de vectores de curvatura normal y tangencial, respectivamente y  $k = \|K\|$  es la curvatura en el punto  $p = r(s)$ . La curvatura  $k$  satisface

$$k^2 = \|r''\|^2 = \langle k_n N + k_g (N \times r'), k_n N + k_g (N \times r') \rangle = k_n^2 + k_g^2$$

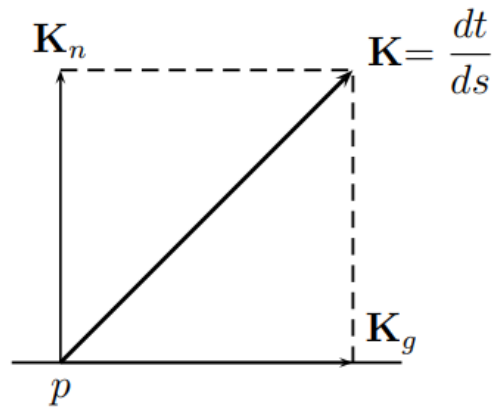


Figura 5. Descomposición del vector curvatura, en sus componentes: normal y tangente  
Fuente Arrieta, C (2006)

El escalar  $k_n$  queda determinado por  $\Gamma$  (no depende de la elección del sentido de  $t$  o  $N$ ); pero el vector  $k_n$  depende en cuanto a su signo del sentido de  $N$ .

A continuación, se presentan las siguientes propiedades del vector curvatura normal  $k_n$  o simplemente de la curvatura normal  $k_n$  en  $p$ . En efecto,

1. De la ecuación  $\langle N, t \rangle = 0$ , se obtiene por derivación a lo largo de  $\Gamma$ :

$$\left\langle \frac{dt}{ds}, N \right\rangle = - \left\langle t, \frac{dN}{ds} \right\rangle = - \left\langle \frac{dr}{ds}, \frac{dN}{ds} \right\rangle$$

De (2.4) y del hecho que

$$\frac{dt}{ds} = k_n N + k_g N \times r'$$

entonces

$$k_n = \langle k_n N, N \rangle = \left\langle \frac{dt}{ds}, N \right\rangle = - \left\langle \frac{dr}{ds}, \frac{dN}{ds} \right\rangle$$

Como

$$s = \int_{s_0}^s |r'(s)| ds$$

entonces  $ds^2 = \langle dr, dr \rangle$  y así

$$k_n = - \frac{\langle dN, dr \rangle}{\langle dr, dr \rangle} \quad (2.5)$$

Se estudia en primer lugar el segundo miembro de esta ecuación.  $N$  y  $r$  son ambos funciones de  $u$  y  $v$  (que a su vez dependen de  $\Gamma$ ). Utilizando las identidades

$$dN = N_u du + N_v dv, \quad dr = r_u du + r_v dv \quad (2.6)$$

la ecuación (2.5) puede escribirse de la forma

$$k_n = \frac{\langle r_u, N_u \rangle du^2 + [\langle r_u, N_v \rangle + \langle r_v, N_u \rangle] du dv + \langle r_v, N_v \rangle dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

O bien

$$k_n = \frac{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \quad (2.7)$$

En esta última ecuación

$$e = -\langle r_u, N_u \rangle, \quad 2f = -[\langle r_u, N_v \rangle + \langle r_v, N_u \rangle], \quad g = -\langle r_v, N_v \rangle \quad (2.8)$$

Son funciones de  $u$  y  $v$ , que dependen de las derivadas segundas se  $r$  respecto de  $u$  y  $v$ , difiriendo en este aspecto de  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , que solo dependen de las primeras derivadas. Se puede escribir el denominador y el numerador de la ecuación (2.7) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I = I_p &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \langle dr, dr \rangle \\ II = II_p &= e du^2 + 2f du dv + g dv^2 = \langle dN, dr \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

Con lo que

$$k_n = \frac{II}{I}$$

Donde  $I$  es la primera forma fundamental y  $II$  es la *segunda forma fundamental*.

2. Por ser

$$\langle r_u, N \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle r_v, N \rangle = 0 \quad (2.10)$$

se puede escribir  $e$ ,  $f$ ,  $g$ , de la forma:

$$e = \langle r_{uu}, N \rangle, \quad f = \langle r_{uv}, N \rangle, \quad g = \langle r_{vv}, N \rangle \quad (2.11)$$

$$e = \frac{\langle r_{uu}, r_u \times r_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (2.12)$$

Análogamente

$$f = \frac{\langle r_{uv}, r_u \times r_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{\langle r_{vv}, r_u \times r_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (2.13)$$

Las fórmulas (2.12) y (2.13) permiten, una vez dada las ecuaciones paramétricas sobre una vecindad coordenada de la superficie, calcular inmediatamente  $e$ ,  $f$  y  $g$ .

3. De la ecuación (2.10) se deduce también que

$$\langle r_u, N_v \rangle = \langle r_v, N_u \rangle$$

de forma que la ecuación (2.8) puede escribirse en una forma mas sencilla:

$$e = -\langle r_u, N_u \rangle, \quad f = -\langle r_u, N_v \rangle = -\langle r_v, N_u \rangle, \quad g = -\langle r_v, N_v \rangle \quad (2.14)$$

4. Al definir la forma cuadrática  $C_p$  en  $T_p M$  por

$$C_p(U) = -\langle dN(U), dr(U) \rangle, \quad U = U_1 r_u + U_2 r_v \in T_p M,$$

entonces las ecuaciones (2.9) y (2.6) implican que  $\Pi_p(U) = C_p(U)$ , esto es,

$$\Pi_p(U) = -\langle dN(U), U \rangle, \quad \forall U \in T_p M \quad (2.15)$$

De igual manera

$$I_p(U) = \langle U, U \rangle, \quad \forall U \in T_p M \quad (2.16)$$

### 2.2.1.15. Curvaturas principales

Se hará uso de la primera y segunda forma cuadrática fundamental para hacer una presentación de las curvaturas principales, Gaussiana y media. Para tal efecto, sea  $M$  una 2-superficie regular,  $(U, x)$  una parametrización de  $M$ , alrededor de  $p \in U \subseteq M$ , y se escribe  $x = x(u, v)$ ,  $\forall (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ . Entonces la primera y segunda forma cuadrática fundamental en  $p$  de  $M$  asociada a esta parametrización está dada por

$$\begin{aligned} I = I_p &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ II = II_p &= e du^2 + 2f du dv + g dv^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \langle x_u, x_u \rangle, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle, \quad G = \langle x_v, x_v \rangle \\ e &= -\langle x_u, N_u \rangle, \quad f = -\langle x_u, N_v \rangle = -\langle x_v, N_u \rangle, \quad g = -\langle x_v, N_v \rangle \end{aligned}$$

Entonces se introduce las siguientes matrices simétricas

$$F_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

que son las matrices asociadas a la primera y segunda forma cuadrática fundamental, respectivamente, en cada punto  $p \in U \subseteq M$ .

Además, observe que si

$$t_1 = \tau_1 x_u + \eta_1 v_v, \quad t_2 = \tau_2 x_u + \eta_2 v_v$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle t_1, t_2 \rangle &= \langle \tau_1 x_u + \eta_1 v_v, \tau_2 x_u + \eta_2 v_v \rangle \\ &= E\tau_1\tau_2 + F(\tau_1\eta_2 + \tau_2\eta_1) + E\eta_1\eta_2 \\ &= \begin{pmatrix} \tau_1 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si se escribe

$$T_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\langle t_1, t_2 \rangle = T_1^t F_1 T_2 \quad (2.19)$$

Por otro lado, escribiendo el vector tangente  $r' = u'x_u + v'x_v$  como

$$T = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

y por un cálculo similar al anterior, se tiene

$$k_n = T^t F_2 T \quad (2.20)$$

**Definición 2.24.** Las curvaturas principales de una superficie son las raíces de la ecuación

$$\det(F_1 - kF_2) = 0 \quad (2.21)$$

es decir,

$$\det \begin{pmatrix} e - kE & f - kF \\ f - kF & g - kG \end{pmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

Como (2.22) es una ecuación cuadrática de variable  $k$ , existen dos raíces. A priori, estas podrían ser números complejos. Por lo tanto, se demostrará que las curvaturas son siempre reales. Note que si  $F_1$  es la matriz identidad (lo que sucede cuando  $M = \mathbb{R}^2$ ), entonces la ecuación (2.21) se convierte en la ecuación para el cálculo de autovalores de  $F_2$ ; y un resultado estándar del Algebra Lineal proporciona que los autovalores de una matriz simétrica son números reales. Como  $F_1$  es invertible, entonces (2.21) es equivalente a

$$\det(F_1(F_1^{-1}F_2 - kI_2)) = 0,$$

esto es,

$$\det(F_1)\det(F_1^{-1}F_2 - kI_2) = 0,$$

con lo que

$$\det(F_1^{-1}F_2 - kI_2) = 0 \quad (2.23),$$

y así las curvaturas principales son los autovalores de  $F_1^{-1}F_2$ . Pero el producto de matrices simétricas no necesariamente es simétrico. Con el siguiente Teorema resolveremos esto y mucho más.

**Teorema 2.11.** Sea  $M$  una 2-superficie regular y  $p \in M$ . Si  $(U, x)$  con  $x = x(u, v)$  una parametrización de  $M$  alrededor de  $p$  y  $N$  es la función de Gauss asociada a esta parametrización, entonces

a. La diferencial  $dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$  de la función de Gauss es una transformación lineal auto adjunta,

b. Existen escalares reales  $a, b, c$  y  $d$  tales que

$$N_u = ax_u + bx_v, \quad N_v = cx_u + dx_v, \quad (2.24)$$

c. Se tiene que

$$dN_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -F_1^{-1}F_2 \quad (2.25)$$



**Demostración.**

- a. Como  $dN_p$  es una transformación lineal y  $\{x_u, x_v\}$  es una base para  $T_p M$ , es suficiente demostrar que

$$\langle dN_p(x_u), x_v \rangle = \langle x_u, dN_p(x_v) \rangle.$$

Para tal efecto, sea

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)), \quad t \in J = [-a, a], \quad a > 0$$

Una parametrización de una curva en  $M$  con  $\alpha(0) = p$ , entonces

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(x_u u'(0) + x_v v'(0)) \\ &= (dN_p) \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0) \end{aligned} \tag{2.26}$$

En particular,

$$dN_p(x_u) = N_u \quad \text{y} \quad dN_p(x_v) = N_v$$

Por lo tanto, para demostrar que  $dN_p$  es auto adjunto, es suficiente probar que

$$\langle N_u, x_v \rangle = \langle x_u, N_v \rangle.$$

Pero esto se obtiene de la siguiente manera, como  $\langle N, x_u \rangle = \langle N, x_v \rangle = 0$ , entonces

$$\langle N_v, x_u \rangle + \langle N, x_{vu} \rangle = 0$$

$$\langle N_u, x_v \rangle + \langle N, x_{uv} \rangle = 0$$

así

$$\begin{aligned} \langle N_v, x_u \rangle &= -\langle N, x_{vu} \rangle \\ &= -\langle N, x_{uv} \rangle \\ &= \langle x_v, N_v \rangle \end{aligned}$$

Lo que demuestra que  $dN_p$  es auto adjunto. Y la parte (a) queda demostrada.

b. Como

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|},$$

entonces  $N \perp N_u$  y  $N \perp N_v$ ; lo que muestra que  $N_u, N_v \in T_p M$ , por lo tanto existen escalares  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que

$$N_u = a x_u + b x_v, \quad N_v = c x_u + d x_v$$

c. Por la parte (a),

$$N_u = a x_u + b x_v, \quad N_v = c x_u + d x_v$$

Y tomando producto interno por  $x_u, x_v$  se tiene

$$\begin{aligned} -e &= aE + bF & -f &= cE + dF \\ -f &= aF + bG & -g &= cF + dG \end{aligned}$$

esto muestra que

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$-F_1^{-1} F_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Y el teorema queda demostrado.

**Definición 2.25.** Sea  $M$  una 2-superficie, si  $k_1, k_2$  son las curvaturas principales de  $p$ , entonces

a.  $K = k_1 k_2$  recibe el nombre de curvatura Gaussiana de  $M$  en  $p$ .

b.  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$  recibe el nombre de curvatura media de  $M$  en  $p$ .

**Definición 2.26.** Un punto  $p$  de una 2-superficie  $M$  se dice

- a. *elíptico* si  $\det(dN_p) > 0$ ,
- b. *hiperbólico* si  $\det(dN_p) < 0$ ,
- c. *parabólico* si  $\det(dN_p) = 0$  y  $dN_p \neq 0$ ,
- d. *planar* si  $dN_p = 0$ .

**Observación 2.11.** Para una 2-superficie  $M$  y por el Teorema (2.11) se tiene

1. en cada punto  $p \in M$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = dN_p$$

2. Las curvaturas principales son los autovalores de  $-dN_p$ ,  $p \in M$

3. Como

$$-F_1^{-1}F_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces, resolviendo se tiene

$$\begin{aligned} a &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} & c &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ b &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} & d &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

4. Si  $k_1, k_2$  son las curvaturas principales, entonces la curvatura Gaussiana satisface

$$K = k_1 k_2 = \det(dN_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

5. Para calcular la curvatura media, se recuerda que  $-k_1, -k_2$  son autovalores de  $dN$ . Por lo tanto,  $k_1$  y  $k_2$  satisfacen la ecuación

$$dN(v) = -kv = -kI(v)$$

para todo  $v \in T_p M$ ,  $v \neq 0$ , donde  $I$  es la función identidad, con lo que

$$\det \begin{pmatrix} a+k & c \\ b & d+k \end{pmatrix} = 0,$$

equivalentemente,

$$k^2 + (a+d)k + ad - bc = 0 \quad (2.27)$$

como  $k_1$  y  $k_2$  son raíces de la ecuación (2.27), se tiene que

$$-(k_1 + k_2) = a + d$$

por lo tanto,

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{a+d}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \quad (2.28)$$

Así,

$$k^2 - 2H + K = 0$$

y por lo tanto

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

De esta relación, se tiene que si  $k_1(q) \geq k_2(q)$ ,  $q \in M$ , entonces las funciones  $k_1$  y  $k_2$  son funciones continuas en  $M$ . Mas aún,  $k_1$  y  $k_2$  son funciones diferenciables en  $M$ , excepto posiblemente, en los puntos umbílicos de  $M$ , esto es, cuando  $k_1 = k_2$ , equivalentemente, cuando  $H^2 = K$ .

#### 2.2.1.16. Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Las siguientes definiciones y propiedades sobre producto vectorial se toman de Acosta-Humánez (2011).

Todas las propiedades usuales del producto vectorial  $v_1 \times v_2$  en  $\mathbb{R}^3$ , se derivan de la definición algebraica de  $v_1 \times v_2$ . La generalización de esta definición es obvia, y

nos llevará al producto vectorial  $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Se definen los elementos que serán necesarios para generalizar el producto vectorial en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.27.** Se define el producto vectorial en  $\mathbb{R}^n$  como la función

$$\times : (\mathbb{R}^n)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que para  $A_1 = (a_{11}, a_{1,2}, \dots, a_{1n}), \dots, A_{n-1} = (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{n-1,n})$ ,  $n-1$  vectores de  $\mathbb{R}^n$ , su producto vectorial esta dado por

$$\times(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} \det(X_k) e_k \quad (2.29)$$

donde  $e_k$  es el  $k$ -ésimo elemento de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y  $X_k$  es la matriz cuadrada que se obtiene al eliminar la  $k$ -ésima columna de la matriz  $(a_{ij})_{(n-1) \times n}$ .

La definición presentada en la expresión (2.29) corresponde a una generalización natural del producto vectorial de dos vectores de  $\mathbb{R}^3$ .

### Algunas propiedades

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Se cumplen las siguientes propiedades

1.  $\times(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$  es un vector ortogonal para los vectores dados

2. Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^n$ ; entonces

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \cdots \times (\alpha A_i + \beta B_i) \times \cdots \times A_{n-1} = \\ A_1 \times A_2 \times \cdots \times \alpha A_i \times \cdots \times A_{n-1} + A_1 \times A_2 \times \cdots \times \beta B_i \times \cdots \times A_{n-1} \end{aligned}$$

3. Sea  $A$  la matriz dada por  $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ . Entonces

$$\det A = A_1 \cdot (A_2 \times \cdots \times A_n) = (-1)^{1+j} A_j \cdot (A_1 \times \cdots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \cdots \times A_n)$$

4. Los vectores  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  son  $n-1$  vectores linealmente dependientes para  $\mathbb{R}^n$  si y solo si  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} = 0$ .

Es bien sabido que estas propiedades pueden probarse utilizando las propiedades del determinante (Marmolejo 1994).

#### Producto vectorial en $\mathbb{R}^4$

Sean los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$ , tal que  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ ; sea además  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  la base canónica de  $\mathbb{R}^4$ . De la definición (2.27), su producto vectorial esta dado por:

$$\begin{aligned} \times(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_4 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

El producto vectorial, también se puede expresar de la forma

$$\begin{aligned} \times(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

similar a como se define el producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo.** Sean los vectores  $\mathbf{u} = (1, -1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 1, 2)$  y  $\mathbf{w} = (-1, 2, -2, 1)$ , tal que  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$ . El producto vectorial de los tres vectores está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_4 \\
&= (3, -4, -5, 1)
\end{aligned}$$

De donde, se tiene que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} = (3, -4, -5, 1)$$

### 2.2.2. La implementación de comandos con el software *MATHEMATICA*

El programa Mathematica constituye una herramienta muy potente para la realización de todo tipo de cálculos matemáticos: operaciones aritméticas, cálculo simbólico, gráficos. Las últimas versiones del programa incorporan un editor de texto (bastante aceptable) y permiten el manejo de “paletas” de símbolos que facilitan el uso de los comandos e instrucciones del programa y la utilización de la simbología habitual en las fórmulas y operaciones matemáticas.

El programa Mathematica está estructurado en 2 partes:

1. **El Front End:** es la interface que permite la comunicación con el usuario. Presenta las entradas y salidas y permite crear y editar ficheros que contienen texto, cálculos, gráficos, etc. Estos ficheros tienen la extensión .nb y se denominan Notebooks (Cuadernos de notas). La información que contienen estos ficheros se estructura mediante un sistema de celdas de diferentes tipos (título, subtítulo, sección, texto, input, output,...).
2. **El Kernel (núcleo):** constituye la estructura interna del programa y es el que se encarga de la realización de los cálculos y operaciones matemáticas que solicita el usuario.

Cuando se comienza a utilizar el programa se activa el Front End con lo que se puede comenzar a introducir datos y expresiones. En el momento en que se desea realizar la primera operación se activa el Kernel que es el módulo que realiza el cálculo. En el Kernel se encuentran introducidos los procedimientos de cálculo relacionados con una gran cantidad de operaciones (las más habituales). Sin embargo, dada la potencia de cálculo del paquete, operaciones y procedimientos más complejos se encuentran almacenados en diferentes *Packages* que deben ser activados antes de realizar los cálculos con ese tipo de sentencias.

En el entorno Windows en que nos movemos, el Front End está dispuesto de manera que todo el desarrollo realizado puede ser almacenado prácticamente como en un editor de texto y tiene además todas las características de conectividad con otros paquetes que funcionen en el mismo entorno windows (OLE). También, muchos de los comandos que ejecuta Mathematica han sido introducidos en ventanas gráficas Palettes que permiten una más rápida implementación de las sentencias y evitan memorizar parte de los comandos utilizados.

Todas estas características permiten un manejo sencillo y rápido de modo que, con una pequeña introducción a las funciones básicas, al modo de introducir datos y la utilización de la ayuda, se puede manejar con soltura en un corto espacio de tiempo

Las posibilidades que ofrece el programa Mathematica son muy variadas:

- a. **Cálculo numérico:** Realización de operaciones de cálculo simples o muy complicadas. El programa nos devuelve el resultado como si se tratara de una calculadora científica. La diferencia es que permite trabajar con la precisión que queramos.
- b. **Cálculo simbólico:** Permite trabajar y operar con expresiones simbólicas.
- c. **Gráficos:** Permite visualizar gráficos en dos o tres dimensiones.
- d. **Definición de variables y funciones:** Permite definir y operar con variables y funciones definidas por el usuario. Mathematica incorpora tanto sus propios comandos como algunas variables de uso muy frecuente de modo que la primera



letra es siempre mayúscula. Para evitar confusiones o errores entre las variables definidas por el usuario y las ya definidas por el programa se recomienda definir variables propias que comiencen por letras minúsculas. Entre las variables definidas en el programa se encuentran Pi, E, I.

En cuanto a los comandos, todos ellos comienzan también con mayúscula y además el argumento que se introduce, así como el resto de datos para el control de la operación van entre corchetes.

Comando [arg , control\_1, control\_2, . . . ]

- e. **Confección de programas:** Mathematica incorpora su propio lenguaje de programación que puede utilizarse para implementar algoritmos de cálculo, bucles, procesos iterativos.

#### 2.2.2.1. Funciones matemáticas comunes

Las funciones matemáticas más comúnmente utilizadas pueden introducirse directamente atendiendo al comando o también mediante las paletas que proporciona *Mathematica*.

Para utilizar estas Paletas basta con situarse en la barra superior en el comando File y en Palettes seleccionar la paleta Basic Calculations. En esta paleta aparecen tanto funciones como comandos muy utilizados.

Por ejemplo, para indicar que se desea realizar una raíz cuadrada se puede utilizar el comando Sqrt[ ] o también se puede utilizar el icono correspondiente que aparece en la paleta  $\sqrt{\quad}$  en este caso basta con rellenar el recuadro con la expresión que se desea evaluar.

En esta paleta también aparecen funciones trigonométricas tanto directas como inversas Sin[ ] , ArcCos[ ] , y las correspondientes expresiones Hiperbólicas Cosh[ ] , ArcTanh[ ] .

#### **2.2.2.2. Listas**

En muchas ocasiones es necesario utilizar datos que se encuentran relacionados entre sí y que pueden ser todos ellos el argumento de una función. En esas ocasiones utilizamos listas para definir todos estos elementos. Una lista contiene elementos que se encuentran separados por comas

En una lista se pueden introducir elementos que no sean del mismo tipo, como valores numéricos, variables, texto, etc. En estos casos deberemos referirnos a uno específicamente para poder realizar la operación correspondiente. Para ello se considera la posición que ocupa dicho elemento en la lista y se hace referencia a él.

Utilizando el comando Table se pueden generar listas sin dar explícitamente cada uno de los elementos que la componen. Basta con indicar la expresión a través de la que se genera y el número de elementos que la componen de la siguiente manera:

$$\text{Table}[\text{expresión}, \{i, \text{min}, \text{max}, \text{paso}\}]$$

donde la expresión es una expresión en la que  $i$  variará entre los valores mínimo y máximo especificados y considerando el paso indicado en la lista.

#### **2.2.2.3. Definición de funciones**

En general los ejercicios que realizaremos con Mathematica no serán únicamente operaciones aritméticas, sino que se necesitará utilizar funciones definidas por el usuario para realizar el análisis de las mismas, así como para operar con ellas. Por ello se debe aprender a definir funciones de una o varias variables, así como evaluar las mismas para cualquier punto.

Para definir funciones, igual que cualquier otra variable definida por el usuario, se recomienda utilizar palabras que empiecen por minúscula o letras minúsculas, para evitar que las variables definidas por el usuario se confundan con variables o comandos propios de Mathematica. La definición de funciones es muy sencilla basta con indicar la expresión correspondiente

Es fundamental definir las funciones, colocando como variable independiente la variable `x_`, este símbolo permite considerar la variable `x` como una variable global que puede ser tanto un valor numérico como una expresión en la que haya definidas otras variables.

#### 2.2.2.4. Operaciones con expresiones algebraicas

Cuando se opera con expresiones algebraicas Mathematica proporciona el resultado exacto (si puede conseguirlo). Sin embargo, las expresiones que se obtienen pueden parecer muy complejas puesto que en ese proceso el paquete no se preocupa de reducir al máximo la expresión. Por ello siempre que las expresiones resulten complejas es muy útil considerar el comando ***Simplify[ ]*** que simplifica al máximo la expresión con que se trabaja.

Otra operación que se puede realizar es la de obtener los factores de una expresión algebraica, muy útil para obtener las raíces de un polinomio, por ejemplo. Para ello se utiliza el comando ***Factor[ ]***.

Del mismo modo puede interesar en ocasiones obtener el desarrollo completo de una expresión algebraica que está simplificada. Para ello se utiliza el comando ***Expand[ ]***

#### 2.2.2.5. Paletas

Las paletas permiten introducir sentencias y realizar operaciones de forma más sencilla. Para algunas sentencias de Mathematica como ***Sqrt[ ]*** (Raíz Cuadrada), ***Sum[ ]*** (Sumatorio), ***Product[ ]*** (Producto), etc. resulta complicado escribir en el notebook cual es la operación que se desea realizar, mientras que con las paletas estas operaciones vienen representadas por sus símbolos matemáticos por lo que basta con introducir los datos de la operación para que ésta se pueda llevar a cabo. Los símbolos que utilizan estas paletas para realizar las operaciones anteriores son:

$$\sqrt{\quad}, \quad \sum_{\text{index}=\text{start}}^{\text{end}} \text{expr}$$

Introduciendo en los recuadros los valores deseados se completa la sentencia con lo que se puede realizar la operación. Basta con pulsar el tabulador para pasar de un recuadro a otro e ir llenando la sentencia completa.

En este sentido *Mathematica* introduce ya como predefinidas una serie de paletas en las que se representan tanto comandos, como operaciones, caracteres, matrices, etc. Para ver todas ellas basta con activar en el menú File la palabra Palettes con lo que se puede ver todas las paletas predefinidas.

Una de las aplicaciones más cómodas de las paletas es la definición de matrices puesto que partiendo de matrices 2 x 2 que aparecen en la paleta se puede llegar a conseguir matrices de cualquier dimensión. Se aumenta el número de filas con el comando " Control + Intro" mientras que el número de columnas aumenta al pulsar "Control + ,"

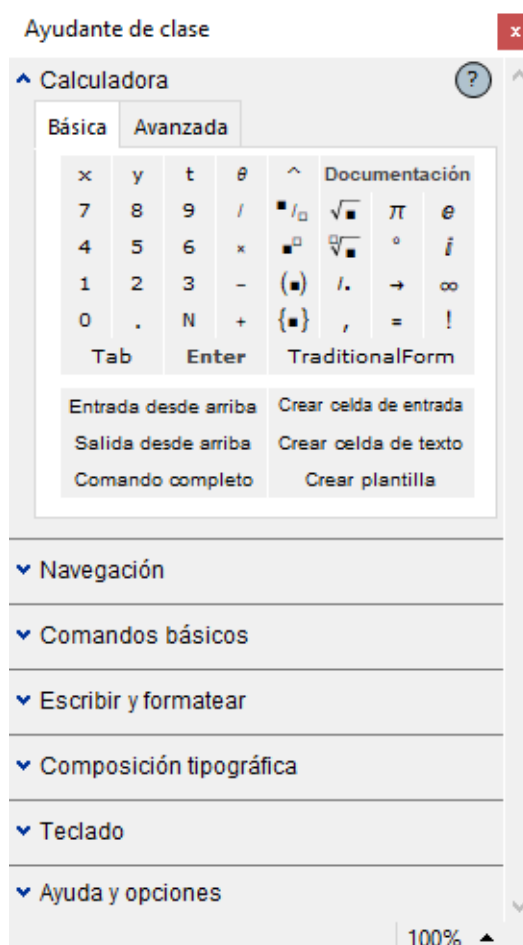


Figura 6. Paleta: ayudante de clase

### 2.2.2.6. Gráficos con Mathematica

Una herramienta de apoyo muy importante a la hora de resolver una gran cantidad de problemas matemáticos (sobre todo de una y dos variables) es la representación de funciones. De esta manera se pueden ver cuáles son los extremos de una función, sus asíntotas, etc. *Mathematica* dispone de una gran cantidad de comandos que permiten representar curvas y superficies.

**Plot y Plot3D.** Estos comandos generan la función  $f$  en un recinto definido por el usuario. La forma de expresarlo es la siguiente:

`Plot[f , {x,x_min,x_max}]`

`Plot3D[f , {x,x_min,x_max},{y,y_min,y_max}]`

Estos dos comandos permiten dibujar funciones de la forma  $y = f(x)$  o  $z = f(x, y)$ . Por otro lado, una gran cantidad de funciones no vienen representadas de forma explícita e incluso es imposible despejar una de las variables en función del resto. Por ello se necesita otra serie de comandos que nos permitan representar esas funciones.

Las otras dos formas en que más habitualmente se presentan las funciones son la forma paramétrica y la forma implícita. A continuación, veremos cómo se representan las funciones cuando viene definidas de esta manera.

**ParametricPlot, ParametricPlot3D.** Estos comandos permiten representar funciones que vienen definidas a través de parámetros. Una función de dos variables se representaría de la siguiente manera:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

A medida que varía el parámetro  $t$  se obtienen puntos de la curva.

Para el caso de tres dimensiones a través de expresiones paramétricas se pueden representar tanto curvas como superficies. Una curva se representa de la siguiente manera:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Para representar una superficie se necesitan dos parámetros, de forma que se obtiene una familia doblemente infinita de puntos que generan la superficie. La superficie se representa de la siguiente manera:

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v)$$

Vista esta introducción podemos presentar la forma de utilizar los comandos ParametricPlot y ParametricPlot3D.

ParametricPlot [{x,y},{t,t\_min,t\_max}]

ParametricPlot3D[{x,y,z},{u,u\_min,u\_max},{v,v\_min,v\_max}]

**ImplicitPlot.** Este comando se emplea para representar funciones definidas de forma implícita de dos variables.

ImplicitPlot[eq, {x,x\_min,x\_max}].

Donde eq es la ecuación que define la función implícita y se introduce además el intervalo donde se dibuja la función.

El comando **Show[ ]** permite representar diferentes gráficos combinados. Mientras que el comando ImplicitPlot permite representar varios gráficos a la vez agrupados entre llaves

**ImplicitPlot3D.** Representa funciones de tres variables en forma implícita. La nomenclatura es de la siguiente forma:

ImplicitPlot3D[eq, {x,x\_min,x\_max}, {y,y\_min,y\_max}, {z,z\_min,z\_max}]

### 2.2.2.7. Packages

Una de las características más importantes de *Mathematica* es que se trata de un sistema extensible. Es decir, hay una gran cantidad de funciones matemáticas, constantes, etc. que están introducidas en el programa. Pero utilizando el lenguaje de *Mathematica* se pueden añadir más funciones a las ya existentes.

En general, cuando se realizan las operaciones más comunes es suficiente con el programa para que se puedan ejecutar. Sin embargo, cuando se trabaja en un campo específico, hay una serie de funciones que no están especificadas en *Mathematica* y se introducen de otro modo.

En estos casos se pueden utilizar los *Mathematica* Packages que son librerías en las que se encuentran definidos procedimientos de cálculo relacionados con operaciones matemáticas más específicas.

Estos Packages consisten en funciones definidas en el lenguaje de *Mathematica* que le permiten al programa realizar estas operaciones mas complejas. Para poder utilizar las funciones que se encuentran en estos Packages en primer lugar se debe indicar a *Mathematica* que se van a utilizar en la sesión funciones específicas de ese paquete. Para ello se carga el paquete en cuestión de la siguiente manera:

```
<< Calculus`VectorAnalysis`
```

Una vez cargado este Package ya se pueden realizar operaciones relacionadas con los comandos que introduce este fichero como pueden ser el cálculo de la divergencia, del gradiente, etc.

Como se puede apreciar al cargar el paquete en la sesión de *Mathematica* se hace referencia al campo general del paquete (en nuestro caso *Calculus*) y a continuación encerrado entre tildes " ` " el paquete particular que se desea cargar (*`VectorAnalysis`*).

## 2.3. Definición de términos básicos o marco conceptual

### Base ortogonal positiva y negativa

Sea  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  una base ortogonal, se dice que  $B$  esta positivamente orientada (o que es positiva) si  $\det(B) > 0$ . En caso contrario, diremos que  $B$  es una base negativamente orientada (o negativa) (Hernández 2010)

### Curva

Una curva diferenciable parametrizada es una función diferenciable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en un conjunto abierto  $I = (a, b)$  de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{R}^n$  (Arrieta, 2006).

### K- Superficies

Un subconjunto  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  es una superficie regular de dimensión  $k$  o simplemente una  $k$ -superficie regular si para cada punto  $p \in M$ , existe un conjunto abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^n$  y una función

$$x : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow V \cap M,$$

De un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$  en  $V \cap M$  tales que

- $x$  es un homeomorfismo diferenciable;
- La diferencial,  $(dx)_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es inyectiva para todo  $q \in U$ .

El par  $(U, x)$  recibe el nombre de parametrización de  $M$  alrededor de  $p$ ; como también a  $x(U)$  se le dice una vecindad coordenada de  $p$ . (Arrieta, 2006).

### Hipersuperficie

En matemática, una hipersuperficie es una variedad  $n$ -dimensional con  $n > 2$  es decir, un objeto geométrico que generaliza la noción de superficie bidimensional, del mismo modo que el hiperplano generaliza la noción de plano.



Técnicamente una hipersuperficie de dimensión  $n$  es un espacio topológico que es localmente homeomorfo al espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Ello significa que para cada punto  $P$  de la hipersuperficie hay una vecindad de  $P$  (una pequeña región que la rodea) que es homeomorfa a un disco abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Eso permite definir una serie de coordenadas locales que parametrizan dicha hipersuperficie.

El tipo más simple de hipersuperficie son las 3-variedades contenidas en el espacio de cuatro dimensiones  $\mathbb{R}^4$ .

### **Parametrización**

Una parametrización de una curva es una aplicación continua definida en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y que toma valores en  $\mathbb{R}^n$  y cuyo rango coincide con la gráfica de la curva.

## **CAPÍTULO III**

### **METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **3.1. Tipo de investigación**

La investigación desarrollada es de tipo descriptiva, evidenciándose una fase de investigación documental y atiende construcciones de programas en el software Mathematica.

#### **3.2. Diseño de la investigación**

Corresponde a un diseño no experimental, de carácter descriptivo, en la que se estudia la teoría necesaria para generar fórmulas y comandos de cálculo con uso del software Mathematica.

Se define el producto vectorial de tres vectores en el espacio euclidiano cuatridimensional, para hallar los vectores tangente, normal, binormal y trinormal de una curva, luego se determinan sus curvaturas en un punto dado. Del mismo modo se determina el plano normal a una superficie para calcular sus respectivas curvaturas. En el caso de las hiper superficies se halla sólo el vector normal.

El Software Científico Mathematica cuenta con licencia de software de la Facultad de Ciencias; dicha licencia esta asignada a los docentes: Dr. Ricardo Velezmoro León y Lic. Robert Ipanaqué Chero.

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

#### 4.1. Curvatura de una curva en $E^4$

**Teorema 4.1.** Sea  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva de clase  $C^{n-1}$ , regular de clase  $n$  y reparametrizada por longitud de arco, entonces para cualquier  $s \in I$ , se tiene que:

$$\begin{bmatrix} e'_1(s) \\ e'_2(s) \\ e'_3(s) \\ \vdots \\ e'_{n-1}(s) \\ e'_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-1}(s) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-1}(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \\ \vdots \\ e_{n-1}(s) \\ e_n(s) \end{bmatrix}$$

En particular, para curvas en  $E^4$ , podemos denotar a la base móvil de Frenet-Serret como  $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}_1(s), \mathbf{B}_2(s)\}$ , donde llamaremos estos vectores, respectivamente, vector tangente, vector normal, Vector binormal y vector tri-normal, de la curva  $\beta$ . Aplicando el teorema 4.1, obtenemos las fórmulas de Frenet-Serret para curvas en  $E^4$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(s) &= k_1(s)\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= -k_1(s)\mathbf{T}(s) + k_2(s)\mathbf{B}_1(s) \\ \mathbf{B}'_1(s) &= -k_2(s)\mathbf{N}(s) + k_3(s)\mathbf{B}_2(s) \\ \mathbf{B}'_2(s) &= -k_3(s)\mathbf{B}_1(s) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como se puede observar que, las curvaturas generalizadas (o curvaturas de Frenet-Serret), se definen, en general, como

$$k_i(s) = e'_i(s) \cdot e_{i+1}(s)$$

#### 4.1.1. Propiedades geométricas en $E^4$

Sea  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ , una curva reparametrizada por longitud de arco, regular y de clase  $C^4$ . A continuación, encontraremos expresiones para las curvaturas  $k_1(s)$ ,  $k_2(s)$  y  $k_3(s)$  para la curva  $\beta$ .

A continuación, se definen los vectores  $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}_1(s), \mathbf{B}_2(s)\}$ , para la base móvil de Frenet – Serret.

##### Vector tangente

Definamos el vector tangente como:

$$\mathbf{T}(s) = \beta'(s)$$

Por otro lado, tenemos que  $\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 1$ ; de donde obtenemos  $\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$ , esto es  $\mathbf{T}'(s) \perp \mathbf{T}(s)$ .

##### Vector normal

Se define el vector Normal como

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} \Rightarrow \mathbf{N}(s) = \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|}$$

Los vectores trinormal y binormal se definen mediante el producto vectorial de tres vectores en  $E^4$

##### Vector trinormal

$$\mathbf{B}_2(s) = \frac{\beta'(s) \times \beta''(s) \times \beta'''(s)}{\|\beta'(s) \times \beta''(s) \times \beta'''(s)\|}$$

##### Vector binormal

$$\mathbf{B}_1(s) = \frac{\mathbf{B}_2(s) \times \beta'(s) \times \beta''(s)}{\|\mathbf{B}_2(s) \times \beta'(s) \times \beta''(s)\|}$$

### Vector normal

Con los vectores definidos arriba, vector tri-normal y vector binormal; tenemos una forma alternativa para definir el vector Normal.

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{B}_1(s) \times \mathbf{B}_2(s) \times \mathbf{T}(s)$$

#### 4.1.2. Algoritmo para determinar las curvaturas de una curva de rapidez unitaria

##### Curvatura $k_1$

Del sistema (4.1), tenemos que

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\ &= \|\beta''(s)\| \mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\ &= \|\beta''(s)\| \end{aligned}$$

Esto es,

$$k_1(s) = \|\beta''(s)\|$$

Por otro lado, tenemos que  $\beta(s) \in C^{(4)}$ . se define los siguientes vectores normales unitarios

##### Curvatura $k_2$

Tenemos que

$$\beta''(s) = k_1(s) \mathbf{N}(s)$$

Derivando la expresión anterior, respecto de  $s$ ,

$$\begin{aligned} \beta'''(s) &= k_1'(s) \mathbf{N}(s) + k_1(s) \mathbf{N}'(s) \\ &= k_1'(s) \mathbf{N}(s) + k_1(s) [-k_1(s) \mathbf{T}(s) + k_2(s) \mathbf{B}_1(s)] \end{aligned}$$

de donde se tiene

$$\beta'''(s) = -k_1^2(s) \mathbf{T}(s) + k_1'(s) \mathbf{N}(s) + k_1(s) k_2(s) \mathbf{B}_1(s) \quad (4.2)$$

Multiplicando escalarmente la expresión (4.2) por  $\mathbf{N}(s)$

$$\beta'''(s) \cdot \mathbf{N}(s) = -k_1^2(s) \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{N}(s) + k_1'(s) \mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{N}(s) + k_1(s) k_2(s) \mathbf{B}_1(s) \cdot \mathbf{N}(s)$$

Simplificando,

$$k_1'(s) = \beta'''(s) \cdot \mathbf{N}(s)$$

Ahora multipliquemos la expresión (4.2) por  $\mathbf{B}_1(s)$

$$\beta'''(s) \cdot \mathbf{B}_1(s) = -k_1^2(s) \underbrace{\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{B}_1(s)}_0 + k_1'(s) \underbrace{\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{B}_1(s)}_0 + k_1(s) k_2(s) \underbrace{\mathbf{B}_1(s) \cdot \mathbf{B}_1(s)}_1$$

Simplificando, se obtiene

$$\beta'''(s) \cdot \mathbf{B}_1(s) = k_1(s) k_2(s),$$

de donde

$$k_2(s) = \frac{\beta'''(s) \cdot \mathbf{B}_1(s)}{k_1(s)}.$$

Sustituyendo el valor de  $k_1(s)$ , se obtiene finalmente

$$k_2(s) = \frac{\beta'''(s) \cdot \mathbf{B}_1(s)}{\|\beta''(s)\|}$$

### Curvatura $k_3$

De la ecuación (4.2), tenemos que

$$\beta'''(s) = -k_1^2(s) \mathbf{T}(s) + k_1'(s) \mathbf{N}(s) + k_1(s) k_2(s) \mathbf{B}_1(s)$$

Derivando, nuevamente, respecto de  $s$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\beta^{(4)}(s) &= -2k_1(s)k_1'(s)\mathbf{T}(s) - k_1^2(s)\mathbf{T}'(s) + k_1''(s)\mathbf{N}(s) + k_1'(s)\mathbf{N}'(s) + \\
&\quad + k_1'(s)k_2(s)\mathbf{B}_1(s) + k_1(s)k_2'(s)\mathbf{B}_1(s) + k_1(s)k_2(s)\mathbf{B}_1'(s) \\
&= -2k_1(s)k_1'(s)\mathbf{T}(s) - k_1^2(s)k_1(s)\mathbf{N}(s) + k_1''(s)\mathbf{N}(s) + \\
&\quad + k_1'(s)[-k_1(s)\mathbf{T}(s) + k_2(s)\mathbf{B}_1(s)] + k_1'(s)k_2(s)\mathbf{B}_1(s) + \\
&\quad + k_1(s)k_2'(s)\mathbf{B}_1(s) + k_1(s)k_2(s)[-k_2(s)\mathbf{N}(s) + k_3(s)\mathbf{B}_2(s)]
\end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned}
\beta^{(4)}(s) &= -3k_1(s)k_1'(s)\mathbf{T}(s) + [-k_1^3(s) + k_1''(s) - k_1(s)k_2^2(s)]\mathbf{N}(s) + \\
&\quad + [2k_1'(s)k_2(s) + k_1(s)k_2'(s)]\mathbf{B}_1(s) + k_1(s)k_2(s)k_3(s)\mathbf{B}_2(s)
\end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente la expresión anterior por  $\mathbf{B}_2(s)$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\beta^{(4)}(s) \cdot \mathbf{B}_2(s) &= -3k_1(s)k_1'(s) \underbrace{\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{B}_2(s)}_0 + \\
&\quad + [-k_1^3(s) + k_1''(s) - k_1(s)k_2^2(s)] \underbrace{\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{B}_2(s)}_0 + \\
&\quad + [2k_1'(s)k_2(s) + k_1(s)k_2'(s)] \underbrace{\mathbf{B}_1(s) \cdot \mathbf{B}_2(s)}_0 + \\
&\quad + k_1(s)k_2(s)k_3(s) \underbrace{\mathbf{B}_2(s) \cdot \mathbf{B}_2(s)}_1
\end{aligned}$$

simplificando

$$\beta^{(4)}(s) \cdot \mathbf{B}_2(s) = k_1(s)k_2(s)k_3(s) \Rightarrow k_3(s) = \frac{\beta^{(4)}(s) \cdot \mathbf{B}_2(s)}{k_1(s)k_2(s)}$$

Sustituyendo los valores de  $k_1$  y  $k_2$ , obtenemos

$$k_3(s) = \frac{\beta^{(4)}(s) \cdot \mathbf{B}_2(s)}{\beta'''(s) \cdot \mathbf{B}_1(s)}$$

Resumiendo lo hallado, tenemos que, para una curva de rapidez unitaria, se cumple que sus curvaturas se expresan de la siguiente manera:

$$k_3(s) = \frac{\beta^{(4)}(s) \cdot \mathbf{B}_2(s)}{\beta'''(s) \cdot \mathbf{B}_1(s)}$$

$$k_2(s) = \frac{\beta'''(s) \cdot \mathbf{B}_1(s)}{\beta''(s) \cdot \mathbf{N}(s)}$$

$$k_1(s) = \frac{\beta''(s) \cdot \mathbf{N}(s)}{\beta'(s) \cdot \mathbf{T}(s)}$$

En general, tenemos que la curvatura de una curva en  $E^4$ , se expresa de la siguiente manera,

$$k_i(s) = \frac{\beta^{(i+1)} \cdot e_{i+1}}{\beta^{(i)} \cdot e_i}, \quad \forall i = 1, 3$$

#### 4.1.3. Curvas de rapidez arbitraria

Sea  $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)\}$  una base ortogonal de Frenet –Serret, para una curva  $\alpha(t)$ , tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \bar{\mathbf{T}}(s(t)) & k_1(t) &= \bar{k}_1(s(t)) \\ \mathbf{N}(t) &= \bar{\mathbf{N}}(s(t)) & & \\ \mathbf{B}_1(t) &= \bar{\mathbf{B}}_1(s(t)) & \text{y } k_2(t) &= \bar{k}_2(s(t)) \\ & & k_3(t) &= \bar{k}_3(s(t)) \\ \mathbf{B}_2(t) &= \bar{\mathbf{B}}_2(s(t)) & & \end{aligned}$$

Sea  $\alpha: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^4$  una curva tal que  $\alpha \in C^{(4)}(I_1)$ , una curva regular con parametrización arbitraria. Sea además,  $\beta: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  una curva reparametrizada por longitud de arco. Sea  $v(t) = \|\alpha'(t)\| = s'(t)$ . Dado que  $\alpha(t) = \beta(s(t))$ , donde  $s(t)$  es una función longitud de arco. Entonces las fórmulas de Frenet – Serret para una curva  $\alpha$  son de la forma



$$\begin{aligned}
\mathbf{T}'(t) &= v(t)k_1(t)\mathbf{N}(t) \\
\mathbf{N}'(t) &= -v(t)k_1(t)\mathbf{T}(t) + v(t)k_2(t)\mathbf{B}_1(t) \\
\mathbf{B}_1'(t) &= -v(t)k_2(t)\mathbf{N}(t) + v(t)k_3(t)\mathbf{B}_2(t) \\
\mathbf{B}_2'(t) &= -v(t)k_3(t)\mathbf{B}_1(t)
\end{aligned}$$

Se tiene que  $\{\bar{\mathbf{T}}(t), \bar{\mathbf{N}}(t), \bar{\mathbf{B}}_1(t), \bar{\mathbf{B}}_2(t)\}$  es un campo de sistema de referencias de  $\beta$ .

El objetivo es encontrar las representaciones para las curvaturas de una curva de rapidez arbitraria.

Se tiene que  $\alpha(t) = \beta(s(t))$ , luego

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \beta'(s(t)) s'(t) \\
&= v(t)\bar{\mathbf{T}}(s) \\
&= v(t)\mathbf{T}(t)
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\alpha'(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$$

Derivando la expresión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha''(t) &= \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t) \\
&= \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(t) + v^2(t)k_1(t)\mathbf{N}(t)
\end{aligned}$$

esto es,

$$\alpha''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(t) + v^2(t)k_1(t)\mathbf{N}(t)$$

Derivando nuevamente,

$$\begin{aligned}
\alpha'''(t) &= \frac{d^2v}{dt^2} \mathbf{T}(t) + \frac{dv}{dt} \mathbf{T}'(t) + 2v(t) \frac{dv}{dt} k_1(t) \mathbf{N}(t) + \\
&\quad + v^2(t) k_1'(t) \mathbf{N}(t) + v^2(t) k_1(t) \mathbf{N}'(t) \\
&= \frac{d^2v}{dt^2} \mathbf{T}(t) + \frac{dv}{dt} \left[ v(t) k_1(t) \mathbf{N}(t) \right] + 2v(t) \frac{dv}{dt} k_1(t) \mathbf{N}(t) + \\
&\quad + v^2(t) k_1'(t) \mathbf{N}(t) + v^2(t) k_1(t) \left[ -v(t) k_1(t) \mathbf{T}(t) + v(t) k_2(t) \mathbf{B}_1(t) \right]
\end{aligned}$$

Agrupando términos,

$$\begin{aligned}
\alpha'''(t) &= \left[ \frac{d^2v}{dt^2} - v^3(t) k_1^2(t) \right] \mathbf{T}(t) + \left[ 3v(t) \frac{dv}{dt} k_1(t) + v^2(t) \frac{dk_1}{dt} \right] \mathbf{N}(t) + \\
&\quad + v^3(t) k_1(t) k_2(t) \mathbf{B}_1(t)
\end{aligned}$$

Derivando por cuarta vez, obtenemos

$$\begin{aligned}
\alpha^{(4)}(t) &= \left[ \frac{d^2v}{dt^2} - v^3(t) k_1(t) \right]' \mathbf{T}(t) + \left[ \frac{d^2v}{dt^2} - v^3(t) k_1(t) \right] \mathbf{T}'(t) + \\
&\quad + \left[ 3v(t) \frac{dv}{dt} k_1(t) + v^2(t) \frac{dk_1}{dt} \right]' \mathbf{N}(t) + \left[ 3v(t) \frac{dv}{dt} k_1(t) + v^2(t) \frac{dk_1}{dt} \right] \mathbf{N}'(t) \\
&\quad + \left[ v^3(t) k_1(t) k_2(t) \right]' \mathbf{B}_1(t) + \left[ v^3(t) k_1(t) k_2(t) \right] \mathbf{B}_1'(t) \\
&= \left[ \frac{d^3v}{dt^3} - 3v^2(t) \frac{dv}{dt} k_1^2(t) - 2v^3(t) k_1(t) \frac{dk_1}{dt} \right] \mathbf{T}(t) + v(t) k_1(t) \left[ \frac{d^2v}{dt^2} - v^3(t) k_1^2(t) \right] \mathbf{N}(t) + \\
&\quad + \left[ 3 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 k_1(t) + 3v(t) \frac{d^2v}{dt^2} k_1(t) + 3v(t) \frac{dv}{dt} \frac{dk_1}{dt} + 2v \frac{dv}{dt} \frac{dk_1}{dt} + v^2(t) \frac{d^2k_1}{dt^2} \right] \mathbf{N}(t) + \\
&\quad + v(t) \left[ 3v(t) \frac{dv}{dt} k_1(t) + v^2(t) \frac{dk_1}{dt} \right] \left[ -k_1(t) \mathbf{T}(t) + k_2(t) \mathbf{B}_1(t) \right] + \\
&\quad + \left[ 3v^2(t) \frac{dv}{dt} k_1(t) k_2(t) + v^3(t) \frac{dk_1}{dt} k_2(t) + v^3(t) k_1(t) \frac{dk_2}{dt} \right] \mathbf{B}_1(t) + \\
&\quad + v^3(t) k_1(t) k_2(t) \left[ -k_2(t) \mathbf{N}(t) + k_3(t) \mathbf{B}_2(t) \right] v(t)
\end{aligned}$$

ordenando términos,

$$\begin{aligned}
\alpha^{(4)} = & \left[ \frac{d^3 v}{dt^3} - 6v^2(t) \frac{dv}{dt} k_1^2(t) - 3v^3(t) k_1(t) \frac{dk_1}{dt} \right] \mathbf{T}(t) + \\
& + \left[ 4v(t) \frac{d^2 v}{dt^2} k_1(t) + 5v(t) \frac{dv}{dt} \frac{dk_1}{dt} + 3 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 k_1(t) + v^2(t) \frac{d^2 k_1}{dt^2} - v^4(t) k_1^2(t) - v^4(t) k_1(t) k_2^2(t) \right] \mathbf{N}(t) + \\
& + \left[ 6v^2(t) \frac{dv}{dt} k_1(t) k_2(t) + 2v^3(t) \frac{dk_1}{dt} k_2(t) + v^3(t) k_1(t) \frac{dk_2}{dt} \right] \mathbf{B}_1(t) + \\
& + v^4(t) k_1(t) k_2(t) k_3(t) \mathbf{B}_2(t)
\end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de calcular las curvaturas de una curva de rapidez arbitraria.

#### 4.1.4. Algoritmo para determinar las curvaturas de una curva de rapidez arbitraria

**Curvatura**  $k_1$

Tenemos que

$$\alpha''(t) = \frac{dv}{dt} \mathbf{T}(t) + v^2(t) k_1(t) \mathbf{N}(t)$$

Multiplicando escalarmente por  $\mathbf{N}(t)$ , tenemos

$$\alpha''(t) \cdot \mathbf{N}(t) = v^2(t) k_1(t)$$

Pero tenemos que,  $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ ; de donde,

$$k_1(t) = \frac{\alpha''(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}$$

por otro lado  $\|\alpha'(t)\| = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = \alpha'(t) \cdot \mathbf{T}(t)$ , luego

$$k_1(t) = \frac{\alpha''(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\alpha'(t)\| \alpha'(t) \cdot \mathbf{T}(t)}$$

### Curvatura $k_2$

Sabemos que

$$\alpha'''(t) = \left[ \frac{d^2 v}{dt^2} - v^3(t) k_1^2(t) \right] \mathbf{T}(t) + \left[ 3v(t) \frac{dv}{dt} k_1(t) + v^2(t) \frac{dk_1}{dt} \right] \mathbf{N}(t) + v^3(t) k_1(t) k_2(t) \mathbf{B}_1(t)$$

Ahora bien, multiplicando escalarmente por  $\mathbf{B}_1(t)$ , se obtiene

$$\alpha'''(t) \cdot \mathbf{B}_1(t) = v^3(t) k_1(t) k_2(t)$$

luego,

$$k_2(t) = \frac{\alpha'''(t) \cdot \mathbf{B}_1(t)}{v^3(t) k_1(t)}$$

sustituyendo el valor de  $k_1$ ,

$$k_2(t) = \frac{\alpha'''(t) \cdot \mathbf{B}_1(t)}{\|\alpha'(t)\| \alpha''(t) \cdot \mathbf{N}(t)}$$

### Curvatura $k_3$

Finalmente multiplicando escalarmente  $\alpha^{(4)}(t)$  por  $\mathbf{B}_2(t)$ , se obtiene

$$\alpha^{(4)}(t) \cdot \mathbf{B}_2(t) = v^4(t) k_1(t) k_2(t) k_3(t)$$

$$k_3(t) = \frac{\alpha^{(4)}(t) \cdot \mathbf{B}_2(t)}{v^4(t) k_1(t) k_2(t)}$$

$$k_3(t) = \frac{\alpha^{(4)}(t) \cdot \mathbf{B}_2(t)}{\|\alpha'(t)\|^4 k_1(t) k_2(t)}$$

Sustituyendo los valores de  $k_1$  y  $k_2$ , obtenemos

$$k_3(t) = \frac{\alpha^{(4)}(t) \cdot \mathbf{B}_2(t)}{\|\alpha'(t)\|^4 \frac{\alpha''(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} \cdot \frac{\alpha'''(t) \cdot \mathbf{B}_1(t)}{\|\alpha'(t)\| \alpha''(t) \cdot \mathbf{N}(t)}}$$

de donde,

$$k_3(t) = \frac{\alpha^{(4)}(t) \cdot \mathbf{B}_2(t)}{\|\alpha'(t)\| \alpha'''(t) \cdot \mathbf{B}_1(t)}$$

Finalmente, tenemos que las curvaturas de una curva de rapidez arbitraria son

$$k_1(t) = \frac{\alpha''(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\alpha'(t)\| \alpha'(t) \cdot \mathbf{T}(t)}$$

$$k_2(t) = \frac{\alpha'''(t) \cdot \mathbf{B}_1(t)}{\|\alpha'(t)\| \alpha''(t) \cdot \mathbf{N}(t)}$$

$$k_3(t) = \frac{\alpha^{(4)}(t) \cdot \mathbf{B}_2(t)}{\|\alpha'(t)\| \alpha'''(t) \cdot \mathbf{B}_1(t)}$$

## 4.2. Curvatura de una 2-superficie en $E^4$

En el espacio euclidiano  $E^3$ , estamos “acostumbrados” a considerar un único vector normal a la superficie, veremos que lo interesante es cómo varía este concepto al cambiar de espacio ambiente.

Existe una diferencia fundamental entre los conceptos intrínsecos y extrínsecos, que en  $E^3$  no se percibe. Como ejemplo de esto la noción, es el de área de una superficie. Se trata de un concepto intrínseco el cual en  $E^3$  suele ser calculado de forma extrínseca (usando el producto vectorial). Es al cambiar la dimensión del espacio ambiente cuando nos damos realmente cuenta del significado de concepto intrínseco.

La primera forma cuadrática fundamental permite tratar cuestiones métricas sobre la superficie  $S$  sin ninguna referencia al espacio ambiente  $E^3$ . Eso es lo que se conoce por geometría intrínseca de la superficie. No es más que lo que podría ser “medido” por un “habitante” de la superficie.

Así como la primera forma cuadrática fundamental determina la geometría intrínseca de una superficie, la segunda forma cuadrática fundamental determina la geometría extrínseca de la misma. Es decir, la forma en que la superficie se encuentra embebida en  $E^3$  y como se curva en relación a dicho espacio ambiente.

El concepto de superficie regular admite, sin ningún tipo de complicación, una generalización a dimensiones más altas, pero aun manteniendo un espacio ambiente.

Adatando la definición 2.21, para una 2-superficie regular en  $E^4$ , a continuación, se da la siguiente definición.

**Definición 4.1** *Un subconjunto  $M \subseteq E^4$  es una superficie regular de dimensión 2 o simplemente una 2-superficie regular si para cada punto  $p \in M$ , existe un conjunto abierto  $V$  de  $p$  en  $E^4$  y una función*

$$x: U \subseteq E^2 \rightarrow V \cap M,$$

*De un abierto  $U$  de  $E^2$  en  $V \cap M$  tales que*

- a.  $x$  es un homeomorfismo diferenciable;*
- b. La diferencial,  $(dx)_q: E^2 \rightarrow E^4$ , es inyectiva para todo  $q \in U$ .*

El par  $(U, x)$  recibe el nombre de parametrización de  $M$  alrededor de  $p$ ; como también a  $x(U)$  se le dice una vecindad coordenada de  $p$ .

**Observación 4.1** Sea  $M$  una 2-superficie y  $p \in M$ .

- a. Se dice que  $(U, x)$  es una parametrización de  $M$  en  $p$  indicando las coordenadas de  $U$  en  $E^2$  que se van a usar; por ejemplo,  $(U, x)$  es una parametrización de  $M$  en  $p$  con coordenadas  $x_1, x_2$ .
- b. Como cada punto de  $M$  está en una vecindad coordenada de  $M$ , entonces existe una familia de parametrizaciones  $F = \{(U_i, \phi_i)\}$ , tal que

$$\bigcup_i \varphi_i(U_i) = M$$

y a la familia  $F$  se le conoce con el nombre de **Estructura diferencial** para  $M$ .

La expresión (2.3), de la sección 2.2.1.11

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^k x'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Se describe como

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \sum_{i=1}^2 x'(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= x'(0) \frac{\partial}{\partial x_1} + x'(0) \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Tenemos las siguientes observaciones

#### Observaciones 4.2

- i. El vector  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2$  es el vector tangente en  $p \in M$  a la curva coordenada  
(ver Figura)

$$x_1 \rightarrow x(x_1, 0, 0, 0)$$

$$x_2 \rightarrow x(0, x_2, 0, 0)$$

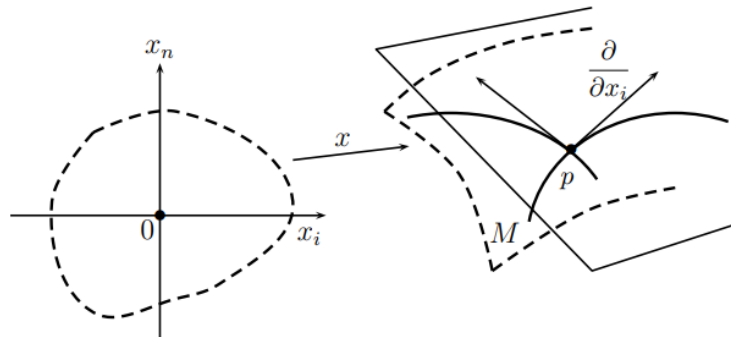


Figura 7. Vectores tangentes de una 2-superficie  
Fuente Arrieta, C (2006)

- ii. La expresión (4.1) demuestra que el vector tangente a una curva  $\alpha$  en  $p$  sólo depende de las derivadas de un sistema de coordenadas; y el conjunto  $T_p M$ , con las operaciones usuales entre funciones, forma un espacio vectorial.
- iii. Al escoger una parametrización  $(U, x)$  alrededor de  $p \in M$ , inmediatamente se determina un conjunto de vectores tangentes en  $p$ ,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$$

que generan a  $T_p M$  y forma una base para  $T_p M$ .

- iv. Es inmediato que la estructura lineal de  $T_p M$  no depende de la parametrización  $x$ .

Sea  $M$  una 2-superficie, se restringe el trabajo a una vecindad coordenada  $(U, x)$  de  $M$ . Así que  $x(u, v)$  con  $(u, v) \in U$ . De donde tenemos que

$$\begin{aligned} M : U \subset E^2 &\rightarrow E^4 \\ (u, v) &\rightarrow x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), x_4(u, v)) \end{aligned}$$

La Primera forma fundamental cuadrática está dada por

$$I = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

donde,

$$E = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

### Observación 4.3

1. La primera forma cuadrática fundamental se puede escribir

$$I = ds^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

la matriz



$$F_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a  $I$

2. Sea  $M$  una 2 –superficie, se supone que la vecindad coordenada  $(U, x)$  de  $M$ , tal que  $\overline{x(U)} = M$ . Por lo tanto,

$$\text{Area}(M) = \iint_U \sqrt{EG - F^2} du dv$$

por lo tanto, el elemento de área, está dado por

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

3. El vector normal exterior a la superficie, no es único como lo era en  $E^3$ , y no puede escribirse en términos del producto vectorial, pues el espacio ambiente ha cambiado.

Se propone un algoritmo para calcular los vectores normales a una 2-superficie. Primero veamos la siguiente definición.

**Definición 4.2.** Sea el vector  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E^4$ , se define el operador  $J : E^4 \rightarrow E^4$  como

$$J(\vec{a}) = (-a_3, -a_4, a_1, a_2)$$

**Propiedad:** Sea el vector  $\vec{a} \in E^4$ , entonces  $\vec{a}$  y  $J(\vec{a})$  son perpendiculares.

En efecto

$$\begin{aligned} J(\vec{a}) \cdot \vec{a} &= (-a_3, -a_4, a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4) \\ &= -a_3a_1 - a_4a_2 + a_1a_3 + a_2a_4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

#### 4.2.1. Curvatura media y gaussiana

Sea  $\{n_1, n_2\}$  una base del **plano normal** a  $M$ , tal que,  $(T_p M)^\perp = N_p M$ , en el punto  $p \in M$ . Definamos los vectores normales como

$$n_1 = n_1(p) = \frac{J\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{\left\|J\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\|} \quad y \quad n_2 = n_2(p) = \frac{J\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)}{\left\|J\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right\|}$$

Se define las correspondientes segundas formas cuadráticas fundamentales como:

$$II^1 = e_1 du^2 + 2f_1 du dv + g_1 dv^2$$

$$II^2 = e_2 du^2 + 2f_2 du dv + g_2 dv^2$$

donde,

$$e_i = x_{uu} \cdot n_i, \quad f_i = x_{uv} \cdot n_i, \quad g_i = x_{vv} \cdot n_i \quad i = 1, 2$$

Cada una de las cuales, se expresan en forma matricial

$$F_2^1 = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ f_1 & g_1 \end{pmatrix} \quad y \quad F_2^2 = \begin{pmatrix} e_2 & f_2 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}$$

La curvatura Gaussiana satisface

$$K = \frac{(e_1 g_1 - f_1^2) + (e_2 g_2 - f_2^2)}{EG - F^2}$$

También se puede escribir de la forma

$$K = \frac{\begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ f_1 & g_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_2 & f_2 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} x_{uu} \cdot n_1 & x_{uv} \cdot n_1 \\ x_{uv} \cdot n_1 & x_{vv} \cdot n_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{uu} \cdot n_2 & x_{uv} \cdot n_2 \\ x_{uv} \cdot n_2 & x_{vv} \cdot n_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} x_u \cdot x_u & x_u \cdot x_v \\ x_u \cdot x_v & x_v \cdot x_v \end{pmatrix}}$$

La curvatura media  $H$ , está dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{(e_1 G - 2f_1 F + g_1 E) + (e_2 G - 2f_2 F + g_2 E)}{EG - F^2}$$

#### 4.2.2. Elipse de curvatura normal

**Definición 4.3.** Sea  $p \in M$  y sea  $\tau \in T_p M$  se define el **vector de curvatura normal** en la dirección  $\tau$ ,  $k_N(\tau) \in N_p$ , como

$$k_N(\tau) = II^1(\tau, \tau)n_1 + II^2(\tau, \tau)n_2$$

A cada punto  $p \in M$  y a cada vector  $\tau \in T_p M$  le corresponde, por tanto, un vector curvatura normal de  $N_p$ . Consideremos la aplicación diferenciable  $(k_N)_p : S^1 \subset T_p M \rightarrow N_p M$ . La imagen de esta aplicación (que es un subconjunto compacto de  $N_p M$ ) es lo que se denomina **indicatriz de curvatura normal**.

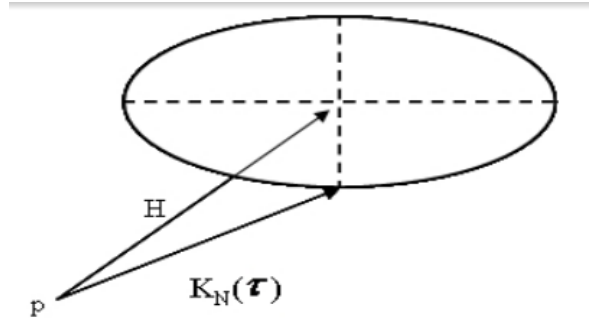


Figura 8. Elipse de curvatura normal

**Teorema 4.2.** *La indicatriz de curvatura normal, en el caso de las superficies contenidas en  $E^4$  es una elipse: **la elipse de curvatura normal**.*

**Demostración.** Sea  $p \in M$ . Sea  $\tau = (\cos \theta \quad \sin \theta) \in S^1$  y sea  $\gamma(s)$  una curva parametrizada por longitud de arco, tal que el vector tangente en  $p$  es  $\tau$ .

Geoméricamente  $(k_N)_p(\tau)$  es la proyección del vector de curvatura  $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$  sobre  $N_p M$ .

Se tiene que:

$$(k_N)_p(\tau) = (e_1 \cos^2 \theta + 2f_1 \cos \theta \sin \theta + g_1 \sin^2 \theta)n_1 + (e_2 \cos^2 \theta + 2f_2 \cos \theta \sin \theta + g_2 \sin^2 \theta)n_2$$

expresado matricialmente,

$$(k_N - H)(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e_1 - g_1) & f_1 \\ \frac{1}{2}(e_2 - g_2) & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

donde  $H = \frac{1}{2}(e_1 + g_1)n_1 + \frac{1}{2}(e_2 + g_2)n_2$

Así tenemos definida una transformación afín de matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 - g_1 & f_1 \\ 0 & e_2 - g_2 & f_2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la imagen de  $S^1$  es una elipse en plano normal a  $M$  en  $p$ .

**Definición 4.4.** Se define el vector de curvatura media como

$$H = \frac{1}{2}(e_1 + g_1)n_1 + \frac{1}{2}(e_2 + g_2)n_2$$

Es decir, sus coordenadas en el plano normal afín a  $M$  en  $p$  son el centro de la elipse de curvatura normal.

La elipse de curvatura normal puede degenerarse en un segmento de recta o en un punto. Dependiendo de si el rango de la matriz de la aplicación afín considerada en la demostración del teorema 4.1 es 2 ó 1.

#### **Aplicaciones de la elipse de curvatura normal**

La elipse de curvatura normal constituye el objeto más importante del estudio de las superficies en  $E^4$ , ya que la geometría de estas superficies se construye a partir de ella.

**Teorema 4.3.** *Supongamos que la indicatriz de curvatura normal de la superficie  $M \subset E^4$  es degenerada consistiendo en un segmento pasando por  $p$  para cada  $p \in M$ . Si la curvatura de Gauss satisface que  $K \neq 0$  en todos los puntos de  $M$ , entonces  $M$  está contenida en algún hiperplano de  $E^4$ .*

**Teorema 4.4.** *Si una superficie  $M$  está contenida en una esfera de radio  $r$  de  $E^4$ , entonces en cada punto  $p$  la elipse de curvatura normal degenera en un segmento a distancia  $\beta = \frac{1}{r}$  de  $p$ . Recíprocamente, si en cada punto  $p$  la elipse de curvatura normal degenera en un segmento a distancia  $\beta$  de  $p$  y la curvatura de Gauss es distinta de  $\beta^2$ , entonces  $M$  está contenida en la esfera de radio  $\frac{1}{\beta}$ .*

**Observación 4.4.**

1. Una superficie se dice mínima si el vector curvatura media es nulo. En el caso de superficies en  $E^4$  esto es equivalente a que la elipse de curvatura normal esté centrada en  $p$  para todo  $p \in M$ .
2. En el caso de superficies inmersas en  $E^3$  la indicatriz de curvatura normal es un segmento contenido en la recta normal a la superficie.

**4.3. Curvatura de una hipersuperficie en  $E^4$** 

**Definición 4.5** Un subconjunto  $M \subseteq E^4$  es una superficie regular de dimensión 3 o simplemente una 3-superficie regular, si para cada punto  $p \in M$ , existe un conjunto abierto  $V$  de  $p$  en  $E^4$  y una función

$$x: U \subseteq E^3 \rightarrow V \cap M,$$

De un abierto  $U$  de  $E^3$  en  $V \cap M$  tales que

- a.  $x$  es un homeomorfismo diferenciable;
- b. La diferencial,  $(dx)_q: E^3 \rightarrow E^4$ , es inyectiva para todo  $q \in U$ .

El par  $(U, x)$  recibe el nombre de parametrización de  $M$  alrededor de  $p$ ; como también a  $x(U)$  se le dice una vecindad coordenada de  $p$ .

**Observación 4.5** Sea  $M$  una 3-superficie y  $p \in M$ .

- a. Se dice que  $(U, x)$  es una parametrización de  $M$  en  $p$  indicando las coordenadas de  $U$  en  $E^3$  que se van a usar; por ejemplo,  $(U, x)$  es una parametrización de  $M$  en  $p$  con coordenadas  $x_1, x_2, x_3$ .
- b. Como cada punto de  $M$  está en una vecindad coordenada de  $M$ , entonces existe una familia de parametrizaciones  $F = \{(U_i, \varphi_i)\}$ , tal que

$$\bigcup_i \varphi_i(U_i) = M$$

y a la familia  $F$  se le conoce con el nombre de **Estructura diferencial** para  $M$ .

La expresión (2.3), de la sección 2.2.1.11

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^k x'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Se describe como

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \sum_{i=1}^3 x'(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= x'(0) \frac{\partial}{\partial x_1} + x'(0) \frac{\partial}{\partial x_2} + x'(0) \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Tenemos las siguientes observaciones

#### Observaciones 4.6

- i. El vector  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i=1,2,3$  es el vector tangente en  $p \in M$  a la curva coordenada (ver Figura)

$$x_1 \rightarrow x(x_1, 0, 0, 0)$$

$$x_2 \rightarrow x(0, x_2, 0, 0)$$

$$x_3 \rightarrow x(0, 0, x_3, 0)$$

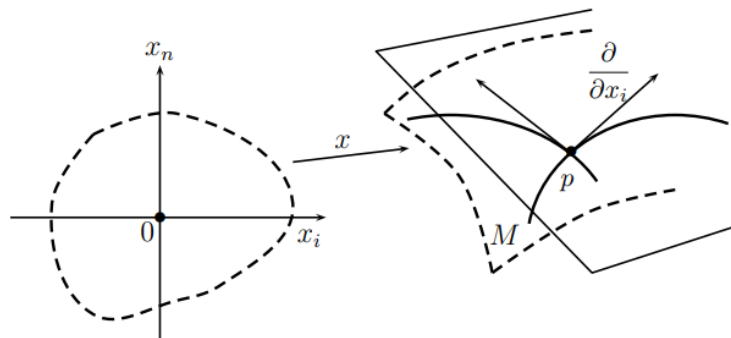


Figura 9. Vectores tangentes de una 3-superficie  
Fuente Arrieta, C (2006)

- ii. La expresión (4.2) demuestra que el vector tangente a una curva  $\alpha$  en  $p$  sólo depende de las derivadas de un sistema de coordenadas; y el conjunto  $T_p M$ , con las operaciones usuales entre funciones, forma un espacio vectorial.
- iii. Al escoger una parametrización  $(U, x)$  alrededor de  $p \in M$ , inmediatamente se determina un conjunto de vectores tangentes en  $p$ ,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

que generan a  $T_p M$  y forma una base para  $T_p M$

- iv. Es inmediato que la estructura lineal de  $T_p M$  no depende de la parametrización  $x$ .

Sea  $M$  una 3-superficie, se restringe el trabajo a una vecindad coordenada  $(U, x)$  de  $M$ . Así que  $x(u, v, w)$  con  $(u, v, w) \in U$ . De donde tenemos que

$$M : U \subset E^3 \rightarrow E^4$$

$$(u, v, w) \rightarrow x(u, v, w) = (x_1(u, v, w), x_2(u, v, w), x_3(u, v, w), x_4(u, v, w))$$

#### 4.3.1. Primera forma fundamental

Si se considera la curva  $\Gamma$  sobre  $M$  definida por la imagen bajo  $x$  de

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad w = w(t) \quad \text{con} \quad t \in J = [a, b]$$

a lo largo de la curva  $\Gamma$ ,  $x$  es una función de  $t$ , es decir,  $\Gamma$  es de la forma

$$r(t) = x(u(t), v(t), w(t)), \quad t \in J$$

Dado que tenemos la relación

$$s = \int_{t_0}^t \|r'(t)\| dt, \quad a < t_0 < t$$



y aunque  $r'(t) \in T_{r(t)}M$ , se puede usar el producto interior del ambiente,  $E^4$ , para obtener entonces

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \|r'(t)\|^2 = \langle r'(t), r'(t) \rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{dw}{dt}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{dw}{dt} \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv + \frac{\partial}{\partial w} dw, \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv + \frac{\partial}{\partial w} dw \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du du + 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle du dv + 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle du dw + \\
 &\quad + \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle dv dv + 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle dv dw + \left\langle \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle dw dw
 \end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, \quad G_{12} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \quad G_{13} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle \\
 G_{22} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \quad G_{23} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle, \quad G_{33} = \left\langle \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle
 \end{aligned}$$

y escribiendo  $A^2 = A \cdot A$ , entonces

$$I = ds^2 = G_{11} du^2 + 2G_{12} du dv + 2G_{13} du dw + G_{22} dv^2 + 2G_{23} dv dw + G_{33} dw dw$$

Donde  $I$  es la **primera forma fundamental**. También se puede escribir de la forma

$$I = ds^2 = \begin{pmatrix} du & dv & dw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}$$

La matriz

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a  $I$ .

Podemos la matriz  $G$  como el producto

$$G = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ x_v \\ x_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \cdot x_u & x_u \cdot x_v & x_u \cdot x_w \\ x_v \cdot x_u & x_v \cdot x_v & x_v \cdot x_w \\ x_w \cdot x_u & x_w \cdot x_v & x_w \cdot x_w \end{pmatrix}$$

**Nota:**  $I$  es también llamado tensor métrico

Se define el **vector normal** a la superficie  $M$ , mediante el producto vectorial definido en la sección 2.2.1.12, como

$$N = N(p) = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \times \frac{\partial}{\partial w}}{\left\| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \times \frac{\partial}{\partial w} \right\|} = \frac{x_u \times x_v \times x_w}{\|x_u \times x_v \times x_w\|}$$

**Observación 4.7.**

$$1. \quad \|x_u \times x_v \times x_w\|^2 = \begin{vmatrix} x_u \cdot x_u & x_u \cdot x_v & x_u \cdot x_w \\ x_v \cdot x_u & x_v \cdot x_v & x_v \cdot x_w \\ x_w \cdot x_u & x_w \cdot x_v & x_w \cdot x_w \end{vmatrix}$$

2. La aplicación de Gauss, está dada por  $N : M \rightarrow S^3$

#### 4.3.2. Segunda forma fundamental

Sin perder generalidad, supondremos que  $M$  es orientable, es decir, existe una aplicación de Gauss diferenciable definida globalmente en  $M$ . La diferencial de esta aplicación constituye el operador de forma de  $M$ . Es fácil ver que, en cada  $p \in M$ ,  $dN_p$  es una aplicación lineal autoadjunta del espacio tangente  $T_p M$  en sí mismo.

**Definición 4.6.** La segunda forma diferencial, es la única forma simétrica  $II(\cdot, \cdot)$  que cumple que para cualesquiera dos elementos  $v_1, v_2 \in T_p M$ :

$$II(v_1, v_2) = I(v_1, -dN_p(v_2))$$

Si se considera la curva  $\Gamma$  sobre  $M$  definida por la imagen bajo  $x$ , entonces se tiene que la segunda forma diferencial se expresa como

$$II = \langle dr, -dN \rangle$$

donde,

$$dN = N_u du + N_v dv + N_w dw \quad y \quad dr = x_u du + x_v dv + x_w dw$$

Sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned} II = & \langle x_u, -N_u \rangle du^2 + [\langle x_u, -N_v \rangle + \langle x_v, -N_u \rangle] du dv + [\langle x_u, -N_w \rangle + \langle x_w, -N_u \rangle] du dw + \\ & + \langle x_v, -N_v \rangle dv^2 + [\langle x_v, -N_w \rangle + \langle x_w, -N_v \rangle] dv dw + \langle x_w, -N_w \rangle dw^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\langle x_u, N \rangle = 0, \quad \langle x_v, N \rangle = 0, \quad \langle x_w, N \rangle = 0$$

derivando  $\langle x_u, N \rangle = 0$ , se tiene

$$\langle x_{uu}, N \rangle = \langle x_u, -N_u \rangle$$

$$\langle x_{uv}, N \rangle = \langle x_u, -N_v \rangle$$

$$\langle x_{uw}, N \rangle = \langle x_u, -N_w \rangle$$

ahora, derivando  $\langle x_v, N \rangle = 0$

$$\langle x_{vu}, N \rangle = \langle x_v, -N_u \rangle$$

$$\langle x_{vv}, N \rangle = \langle x_v, -N_v \rangle$$

$$\langle x_{vw}, N \rangle = \langle x_v, -N_w \rangle$$

finalmente, derivando  $\langle x_w, N \rangle = 0$

$$\langle x_{uu}, N \rangle = \langle x_u, -N_u \rangle$$

$$\langle x_{uv}, N \rangle = \langle x_v, -N_v \rangle$$

$$\langle x_{vw}, N \rangle = \langle x_w, -N_w \rangle$$

De donde se obtiene las siguientes igualdades

$$\langle x_{uv}, N \rangle = \langle x_u, -N_v \rangle = \langle x_v, -N_u \rangle$$

$$\langle x_{uw}, N \rangle = \langle x_u, -N_w \rangle = \langle x_w, -N_u \rangle$$

$$\langle x_{vw}, N \rangle = \langle x_v, -N_w \rangle = \langle x_w, -N_v \rangle$$

Con los cual, la segunda forma fundamental se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} II = & \langle x_{uu}, N \rangle du^2 + 2 \langle x_{uv}, N \rangle du dv + 2 \langle x_{uw}, N \rangle du dw + \\ & + \langle x_{vv}, N \rangle dv^2 + 2 \langle x_{vw}, N \rangle dv dw + \langle x_{ww}, N \rangle dw^2 \end{aligned}$$

Se introduce la matriz simétrica, asociada a la segunda forma fundamental

$$g = \begin{pmatrix} x_{uu} \cdot N & x_{uv} \cdot N & x_{uw} \cdot N \\ x_{uv} \cdot N & x_{vv} \cdot N & x_{vw} \cdot N \\ x_{uw} \cdot N & x_{vw} \cdot N & x_{ww} \cdot N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Donde  $g$  es la matriz asociada a la segunda forma fundamental.

Tal como en el caso de las superficies, el operador de forma se escribe en términos de las dos formas fundamentales como sigue

$$d N_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -G^{-1} g$$

tal que,

$$a_{ij} = \frac{g_{ij} (G_{kl}^2 - G_{kk} G_{ll}) + g_{jk} (G_{ik} G_{ll} - G_{il} G_{kk}) + g_{jl} (G_{il} G_{kk} - G_{ik} G_{ll})}{\Delta}$$

donde  $\Delta = |G|$

**Observación 4.8.**

1. Los valores propios son las raíces del polinomio característico

$$\begin{aligned}
 \det(a + kI) &= k^3 + k^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \\
 &\quad + k(a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31}) + \\
 &\quad + (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} - a_{13}a_{31}a_{22}) \\
 &= k^3 + 3 \frac{\text{tra}(a)}{3} k^2 + 3 \frac{\text{men}(a)}{3} k + \det(a)
 \end{aligned}$$

La curvatura media  $H$  de  $M$  en  $p$  es igual a  $\frac{1}{3}$  de la traza de  $dN_p$ ; la curvatura seccional media principal  $L$  de  $M$  en  $p$  se define como  $\frac{1}{3}$  de la suma de los menores principales de  $dN_p$  y la curvatura gaussiana  $K$  de  $M$  en  $p$  es el determinante de  $dN_p$ . Las curvaturas media y gaussiana son las generalizaciones de los conceptos correspondientes en superficies de  $E^3$ . El nombre de curvatura seccional media principal está justificado porque se trata del promedio de los sub - determinantes principales  $2 \times 2$  (menores) de  $dN_p$ , los cuales están asociados a secciones bidimensionales del espacio tangente  $T_p M$ .

2. Las curvaturas principales  $-k_1, -k_2, -k_3$  son los autovalores de  $-dN_p$ ,  $p \in M$ .  
Dado que  $dN_p$  es auto-adjunta, posee una base de vectores propios ortogonales en la cual se realiza como una matriz diagonal. Las cantidades que aparecen en la diagonal de dicha matriz son los valores propios  $-k_1, -k_2, -k_3$ . Estos valores son las llamadas curvaturas principales de  $M$  en  $p$ .
3. En vista de que  $\text{tra}$ ,  $\text{men}$  y  $\det$  son invariantes bajo aplicaciones similares, las curvaturas definidas en el párrafo anterior se pueden calcular a partir de la mencionada matriz diagonal.

### 4.3.3. Curvatura media, seccional y gaussiana

#### Curvatura media

La curvatura media se puede calcular fácilmente como menos un tercio de la suma de las curvaturas principales

$$\begin{aligned} H &= -\frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \\ &= -\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3} \end{aligned}$$

#### Curvatura seccional media principal

Dicha curvatura se calcula de la siguiente manera,

$$C_s = \frac{1}{3} \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

#### Curvatura gaussiana

La curvatura gaussiana de  $M$  en  $p$ , a diferencia del caso bidimensional, depende de la orientación; y se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} K &= -k_1 k_2 k_3 \\ &= \det(a) \\ &= \frac{|g|}{|G|} \end{aligned}$$

En términos de la primera y segunda forma fundamental, la curvatura gaussiana, se escribe

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} \cdot N & x_{uv} \cdot N & x_{uw} \cdot N \\ x_{uv} \cdot N & x_{vv} \cdot N & x_{vw} \cdot N \\ x_{uw} \cdot N & x_{vw} \cdot N & x_{ww} \cdot N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u \cdot x_u & x_u \cdot x_v & x_u \cdot x_w \\ x_v \cdot x_u & x_v \cdot x_v & x_v \cdot x_w \\ x_w \cdot x_u & x_w \cdot x_v & x_w \cdot x_w \end{vmatrix}}$$

## 4.4. Comandos para el cálculo de las curvaturas de una curva en $E^4$

### 4.4.1. Sintaxis de comandos en Mathematica

En el software científico *Mathematica*, es posible implementar nuevos comandos, a partir de los comandos propios incorporados en el programa. De este modo, se obtiene instrucciones nuevas y diferentes a las realizadas por el *Mathematica*.

A continuación, se describe la sintaxis y el funcionamiento de los comandos más importantes que se han utilizado para la creación de nuevos comandos, para el calcula de la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies. La sintaxis de los comandos es tomada de la página de ayuda del software Mathematica y de las páginas virtuales de la Fundación Wolfram.

#### Length

Sintaxis: `Length [expr]`

Da como resultado el número de elementos de la *expresión*

Ejemplo

```
In[1] := Length[{2,5,7,11}]
Out[1] := 4
```

#### Module

Sintaxis: `Module [x= x0, y = y0, ..., body]`

Devuelve el resultado de **body**, utilizando las variables locales incluidas.

Ejemplo:

```
In[1] := f[x0_] := Module[{x = x0}, While[x > 0, x = Log[x]]; x]
In[1] := f[2.0]
Out[1] := -0.36651292058166435
```

Esta sentencia calcula el logaritmo de x

#### D

Sintaxis: `D [f, x]`

Devuelve la derivada parcial de  $f$  respecto de  $x$ .

Sintaxis: `D[f, {x, n}]`

Devuelve la derivada múltiple de  $f$  respecto de  $x$ ,  $n$  veces.

Ejemplo:

$$\text{In}[1] := \alpha[t_] := \left\{ \frac{r \cos[t]}{\sqrt{2}}, \frac{r \sin[t]}{\sqrt{2}}, \frac{r \cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{r \sin[t]}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$D[\alpha, \{t, 2\}]$$

$$\text{Out}[1] := \left\{ -\frac{r \cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{r \sin[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{r \cos[t]}{\sqrt{2}}, \frac{r \sin[t]}{\sqrt{2}} \right\}$$

Se obtiene la segunda derivada de  $\alpha$

### Cross

Sintaxis: `Cross[v1, v2, ..., vn]`

Devuelve el producto vectorial de los  $n$  vectores de  $n$  dimension..

Ejemplo:

$$\text{In}[1] := v1 = \{1, 2, 3, 4\};$$

$$v2 = \{1, -2, 3, 1\};$$

$$v3 = \{1, 3, 2, -4\};$$

$$\text{Cross}[v1, v2, v3]$$

$$\text{Out}[1] := \{95, -3, -35, 4\}$$

Calcula el producto vectorial de tres vectores cuatridimensionales.

A continuación, se presentan las sentencias y comandos que permiten calcular la curvatura de una curva en  $E^4$ .



#### 4.4.2. Comandos en Mathematica para calcular la curvatura de una curva

Se muestra, mediante capturas de pantalla los comandos que permiten calcular las curvaturas de una curva en  $E^4$

## Curvas en $E^4$

### Comandos

```
In[*]:= unit[v_] := v / Sqrt[v.v];  
           |raíz cuadrada  
norm[v_] := Sqrt[v.v];  
           |raíz cuadrada  
J1[{a1_, a2_, a3_, a4_}] := {-a3, -a4, a1, a2}  
  
In[*]:= VectoresNormales[exp_] := Module[{r},  
           |módulo  
A = {D[exp, t], D[exp, {t, 2}], D[exp, {t, 3}], D[exp, {t, 4}]}];  
           |deriva |deriva |deriva |deriva  
r = MatrixRank[A];  
           |rango matricial  
VectorTangente = unit[A[[1]]] // Simplify // PowerExpand;  
           |simplifica |expande potencias  
VectorTrinormal = If[r < 3,  
           |si  
           unit[Cross[A[[1]], A[[2]], J1[A[[1]]]] // Simplify // PowerExpand,  
           |producto vectorial |simplifica |expande potencias  
           unit[Cross[A[[1]], A[[2]], A[[3]]] // Simplify // PowerExpand  
           |producto vectorial |simplifica |expande potencias  
           ];  
VectorBinormal = -unit[Cross[A[[1]], A[[2]], VectorTrinormal]] // Simplify // PowerExpand;  
           |producto vectorial |simplifica |expande potencias  
VectorNormal = -unit[Cross[A[[1]], VectorTrinormal, VectorBinormal]] // Simplify // PowerExpand;  
           |producto vectorial |simplifica |expande potencias  
{VectorTangente, VectorNormal, VectorBinormal, VectorTrinormal}  
]
```

Figura 10. Comandos que permiten calcular los vectores normales de una curva

**Comando** VectoresNormales[exp]

Determina los vectores Tangente, Normal, Binormal y Trinormal de una curva.

```

]
In[8]:= Curvatura[exp_] := Module[{ },
    [módulo]
    k1 = A[[2]].VectorNormal / (A[[1]].A[[1]]) // Simplify // PowerExpand;
    [simplifica] [expande potencias]
    k2 = A[[3]].VectorBinormal / (norm[A[[1]]] (A[[2]].VectorNormal)) // Simplify // PowerExpand;
    [simplifica] [expande potencias]
    k3 = If[k2 === 0, 0,
    [si]
    A[[4]].VectorTrinormal / (norm[A[[1]]] (A[[3]].VectorBinormal)) // Simplify // PowerExpand
    [simplifica] [expande potencias]
    ];
    {k1, k2, k3}
]

```

Figura 11. Comando Curvatura. Calcula las curvaturas de una curva

**Comando** `Curvatura[exp]`

Devuelve las curvaturas de una curva

#### 4.4.3. Uso de los comandos para determinar la curvatura de una curva

##### Ejemplo 1. Circunferencia

Ahora, se muestran algunos ejemplos aplicativos. En primer lugar, se calcula la curvatura de una circunferencia, que se ha transformado previamente a coordenadas cuatridimensionales, mediante el comando `Orthogonalize`.

**Comando** `Orthogonalize[{v1, v2, ...}]`

Devuelve una base ortogonal, al ortogonalizar los vectores  $v_i$ .

## Circunferencia

In[ ]:=  $\alpha := r \{ \text{Cos}[t], \text{Sin}[t], 0, 0 \}.$   
coseno seno

$\text{Orthogonalize}[\{ \{1, 0, 1, 0\}, \{0, 1, 0, -1\}, \{1, 0, 0, 1\}, \{0, 1, 1, 0\} \}]$   
ortogonaliza

In[ ]:=  $\alpha$

$$\text{Out[ ]} = \left\{ \frac{r \text{Cos}[t]}{\sqrt{2}}, \frac{r \text{Sin}[t]}{\sqrt{2}}, \frac{r \text{Cos}[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{r \text{Sin}[t]}{\sqrt{2}} \right\}$$

### Derivadas de la curva

In[ ]:=  $D[\alpha, t]$   
deriva

$$\text{Out[ ]} = \left\{ -\frac{r \text{Sin}[t]}{\sqrt{2}}, \frac{r \text{Cos}[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{r \text{Sin}[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{r \text{Cos}[t]}{\sqrt{2}} \right\}$$

In[ ]:=  $D[\alpha, \{t, 2\}]$   
deriva

$$\text{Out[ ]} = \left\{ -\frac{r \text{Cos}[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{r \text{Sin}[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{r \text{Cos}[t]}{\sqrt{2}}, \frac{r \text{Sin}[t]}{\sqrt{2}} \right\}$$

Figura 12. Circunferencia en  $E^4$

## vectores ortogonales

In[ ]:= **VectoresNormales**[α]

$$\text{Out[ ]}:= \left\{ \left\{ -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, \frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos[t]}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ -\frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, \frac{\sin[t]}{\sqrt{2}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, \frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, \frac{\cos[t]}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ \frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}} \right\} \right\}$$

In[ ]:= **VectorTrinormal**

$$\text{Out[ ]}:= \left\{ \frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}} \right\}$$

In[ ]:= **VectorBinormal**

$$\text{Out[ ]}:= \left\{ \frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, \frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, \frac{\cos[t]}{\sqrt{2}} \right\}$$

In[ ]:= **VectorNormal**

$$\text{Out[ ]}:= \left\{ -\frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, \frac{\sin[t]}{\sqrt{2}} \right\}$$

In[ ]:= **VectorTangente**

$$\text{Out[ ]}:= \left\{ -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, \frac{\cos[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos[t]}{\sqrt{2}} \right\}$$

Figura 13. Vectores ortogonales a la circunferencia

## Curvaturas

In[ ]:= **Curvatura**[α]

$$\text{Out[ ]}:= \left\{ \frac{1}{r}, 0, 0 \right\}$$

curvatura k1

In[ ]:= **k1**

$$\text{Out[ ]}:= \frac{1}{r}$$

curvatura k2

In[ ]:= **k2**

$$\text{Out[ ]}:= 0$$

Dado que  $k2 = 0$ , esto significa que la curva es plana, como ya sabemos.

Figura 14. Cálculo de la curvatura de la circunferencia

## Ejemplo 2: Curva cuatridimensional

Se define la curva  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t)$  y se procede a determinar sus curvaturas

```
In[ ]:=  $\alpha1 := r \{ \text{Cos}[t], \text{Sin}[t], \text{Cos}[2t], \text{Sin}[2t] \};$   
           [coseno   seno   [coseno   seno  
  
            $\alpha1$   
  
Out[ ]:= { r Cos [ t ] , r Sin [ t ] , r Cos [ 2 t ] , r Sin [ 2 t ] }
```

**Derivadas de la curva**

```
In[ ]:= D[ $\alpha1$ , t]  
           [deriva  
  
Out[ ]:= { - r Sin [ t ] , r Cos [ t ] , - 2 r Sin [ 2 t ] , 2 r Cos [ 2 t ] }
```

```
In[ ]:= D[ $\alpha1$ , {t, 2}]  
           [deriva  
  
Out[ ]:= { - r Cos [ t ] , - r Sin [ t ] , - 4 r Cos [ 2 t ] , - 4 r Sin [ 2 t ] }
```

```
In[ ]:= D[ $\alpha1$ , {t, 3}]  
           [deriva  
  
Out[ ]:= { r Sin [ t ] , - r Cos [ t ] , 8 r Sin [ 2 t ] , - 8 r Cos [ 2 t ] }
```

```
In[ ]:= D[ $\alpha1$ , {t, 4}]  
           [deriva  
  
Out[ ]:= { r Cos [ t ] , r Sin [ t ] , 16 r Cos [ 2 t ] , 16 r Sin [ 2 t ] }
```

Figura 15. Una curva en  $E^4$

Se muestra la curva y sus cuatro primeras derivadas

## Vectores unitarios

In[ ]:= **VectoresNormales[α1]**

$$\text{Out[ ]:= } \left\{ \left\{ -\frac{\sin[t]}{\sqrt{5}}, \frac{\cos[t]}{\sqrt{5}}, -\frac{4\cos[t]\sin[t]}{\sqrt{5}}, \frac{2\cos[2t]}{\sqrt{5}} \right\}, \right. \\ \left\{ -\frac{\cos[t]}{\sqrt{17}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{17}}, -\frac{4\cos[2t]}{\sqrt{17}}, -\frac{8\cos[t]\sin[t]}{\sqrt{17}} \right\}, \\ \left\{ -\frac{2\sin[t]}{\sqrt{5}}, \frac{2\cos[t]}{\sqrt{5}}, \frac{\sin[2t]}{\sqrt{5}}, -\frac{\cos[2t]}{\sqrt{5}} \right\}, \\ \left. \left\{ -\frac{4\cos[t]}{\sqrt{17}}, -\frac{4\sin[t]}{\sqrt{17}}, \frac{\cos[2t]}{\sqrt{17}}, \frac{\sin[2t]}{\sqrt{17}} \right\} \right\}$$

In[ ]:= **VectorTrinormal**

$$\text{Out[ ]:= } \left\{ -\frac{4\cos[t]}{\sqrt{17}}, -\frac{4\sin[t]}{\sqrt{17}}, \frac{\cos[2t]}{\sqrt{17}}, \frac{\sin[2t]}{\sqrt{17}} \right\}$$

In[ ]:= **VectorBinormal**

$$\text{Out[ ]:= } \left\{ -\frac{2\sin[t]}{\sqrt{5}}, \frac{2\cos[t]}{\sqrt{5}}, \frac{\sin[2t]}{\sqrt{5}}, -\frac{\cos[2t]}{\sqrt{5}} \right\}$$

In[ ]:= **VectorNormal**

$$\text{Out[ ]:= } \left\{ -\frac{\cos[t]}{\sqrt{17}}, -\frac{\sin[t]}{\sqrt{17}}, -\frac{4\cos[2t]}{\sqrt{17}}, -\frac{8\cos[t]\sin[t]}{\sqrt{17}} \right\}$$

In[ ]:= **VectorTangente**

$$\text{Out[ ]:= } \left\{ -\frac{\sin[t]}{\sqrt{5}}, \frac{\cos[t]}{\sqrt{5}}, -\frac{4\cos[t]\sin[t]}{\sqrt{5}}, \frac{2\cos[2t]}{\sqrt{5}} \right\}$$

Figura 16. Vectores ortogonales de una curva

## Curvaturas

```
In[ ]:= Curvatura[α1]
```

$$\text{Out[ ]} = \left\{ \frac{\sqrt{17}}{5r}, \frac{6}{5\sqrt{17}r}, \frac{2}{\sqrt{17}r} \right\}$$

curvatura k1

```
In[ ]:= k1
```

$$\text{Out[ ]} = \frac{\sqrt{17}}{5r}$$

curvatura k2

```
In[ ]:= k2
```

$$\text{Out[ ]} = \frac{6}{5\sqrt{17}r}$$

curvatura k3

```
In[ ]:= k3
```

$$\text{Out[ ]} = \frac{2}{\sqrt{17}r}$$

Figura 17. Cálculo de las curvaturas de la curva

Esta curva tiene una propiedad parecida a la hélice; es decir, sus curvaturas son proporcionales

## Propiedad

```
In[ ]:=  $\frac{k2}{k1}$  // Simplify
```

$$\text{Out[ ]} = \frac{6}{17}$$

```
In[ ]:=  $\frac{k3}{k2}$  // Simplify
```

$$\text{Out[ ]} = \frac{5}{3}$$

Figura 18. Proporcionalidad de las curvaturas

### Ejemplo 3: Curva plana

```
In[ ]:=  $\alpha_2 := \{r_1 \cos[t], r_1 \sin[t], r_2 \cos[t], r_2 \sin[t]\};$   
           |coseno      |seno      |coseno      |seno  
 $\alpha_2$   
Out[ ]:= {r1 Cos[t], r1 Sin[t], r2 Cos[t], r2 Sin[t]}
```

#### derivadas de la curva

```
In[ ]:= D[ $\alpha_2$ , t]  
           |deriva  
Out[ ]:= {-r1 Sin[t], r1 Cos[t], -r2 Sin[t], r2 Cos[t]}
```

```
In[ ]:= D[ $\alpha_2$ , {t, 2}]  
           |deriva  
Out[ ]:= {-r1 Cos[t], -r1 Sin[t], -r2 Cos[t], -r2 Sin[t]}
```

```
In[ ]:= D[ $\alpha_2$ , {t, 3}]  
           |deriva  
Out[ ]:= {r1 Sin[t], -r1 Cos[t], r2 Sin[t], -r2 Cos[t]}
```

```
In[ ]:= D[ $\alpha_2$ , {t, 4}]  
           |deriva  
Out[ ]:= {r1 Cos[t], r1 Sin[t], r2 Cos[t], r2 Sin[t]}
```

---

Figura 19. Curva en  $E^4$



## Vectores unitarios

In[ ]:= **VectoresNormales**[α2]

In[ ]:= **VectorTrinormal**

$$\text{Out[ ]} = \left\{ \frac{r_2 \cos[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \frac{r_2 \sin[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, -\frac{r_1 \cos[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, -\frac{r_1 \sin[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right\}$$

In[ ]:= **VectorBinormal**

$$\text{Out[ ]} = \left\{ \frac{r_2 \sin[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, -\frac{r_2 \cos[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, -\frac{r_1 \sin[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \frac{r_1 \cos[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right\}$$

In[ ]:= **VectorNormal**

$$\text{Out[ ]} = \left\{ -\frac{r_1 \cos[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, -\frac{r_1 \sin[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, -\frac{r_2 \cos[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, -\frac{r_2 \sin[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right\}$$

In[ ]:= **VectorTangente**

$$\text{Out[ ]} = \left\{ -\frac{r_1 \sin[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \frac{r_1 \cos[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, -\frac{r_2 \sin[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \frac{r_2 \cos[t]}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right\}$$

Figura 20. Vectores normales a la curva del ejemplo 3

## Curvaturas

In[ ]:= **Curvatura**[α2]

$$\text{Out[ ]} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, 0, 0 \right\}$$

curvatura k1

In[ ]:= **k1**

$$\text{Out[ ]} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

curvatura k2

In[ ]:= **k2**

$$\text{Out[ ]} = 0$$

Se trata de una curva plana, esto significa la que curva esta contenida en algún plano del espacio cuatridimensional.

Figura 21. Curvaturas de la curva del ejemplo 3

## 4.5. Comandos para el cálculo de la curvatura de una 2-superficie en $E^4$

A continuación, se muestran los comandos que permiten calcular la curvatura de una 2-superficie, además se grafica su respectiva elipse de curvatura, se concluye la sección dando algunos ejemplos ilustrativos.

### 4.5.1. Comandos en Mathematica para calcular la curvatura de una 2-superficie

Se muestra, mediante capturas de pantalla los comandos que permiten calcular la curvatura de una 2-superficie en  $E^4$

## 2 - Superficie en $E^4$

### Comandos

```
In[ ]:= unit[v_] := v / Sqrt[v.v];  
           |raíz cuadrada  
norm[v_] := Sqrt[v.v];  
           |raíz cuadrada  
J1[{a1_, a2_, a3_, a4_}] := {-a3, -a4, a1, a2}  
  
In[ ]:= VectoresNormales[exp_] := Module[{ },  
           |módulo  
    {xu, xv} = {D[exp, u], D[exp, v]} // Simplify // PowerExpand;  
           |deriva |deriva |simplifica |expande potencias  
    {xuu, xuv, xvv} = {D[exp, {u, 2}], D[exp, {u, 1}], {v, 1}], D[exp, {v, 2}]} // Simplify //  
           |deriva |deriva |deriva |simplifica  
    PowerExpand;  
           |expande potencias  
    Normal1 = unit[J1[xu]] // Simplify // PowerExpand;  
           |simplifica |expande potencias  
    Normal2 = unit[J1[xv]] // Simplify // PowerExpand;  
           |simplifica |expande potencias  
    {Normal1, Normal2}  
    ]
```

Figura 22. Comando Vectores normales, para una 2-superficie

**Comando** `VectoresNormales[exp]`

Devuelve los vectores normales de una 2 – Superficie.

```

In[ ]:= FormasFundamentales[exp_] := Module[{ },
    F = {{xu.xu, xu.xv}, {xu.xv, xv.xv}} // Simplify // PowerExpand;
    FormaFundamental1 = Det[F];
    F1 = {{xuu.Normal1, xuv.Normal1}, {xuv.Normal1, xvv.Normal1}} // Simplify // PowerExpand;
    F2 = {{xuu.Normal2, xuv.Normal2}, {xuv.Normal2, xvv.Normal2}} // Simplify // PowerExpand;
    FormaFundamental2 = (Det[F1] + Det[F2]) // Simplify // PowerExpand;
    {FormaFundamental1, FormaFundamental2}
]

```

Figura 23. Comando FormasFundamentales

**Comando** `FormasFundamentales[exp]`

Devuelve la primera y segunda forma fundamental de una 2 – Superficie.

```

In[ ]:= CurvaturaGaussiana[exp_] := Module[{ },
    FormaFundamental2 / FormaFundamental1 // Simplify // PowerExpand
]

In[ ]:= CurvaturaMedia[exp_] := Module[{ },
    1 / FormaFundamental1 *
    (F1[[1, 1]] F[[2, 2]] - 2 F1[[1, 2]] F[[1, 2]] + F1[[2, 2]] F[[1, 1]] +
    F2[[1, 1]] F[[2, 2]] - 2 F2[[1, 2]] F[[1, 2]] + F2[[2, 2]] F[[1, 1]]) // FullSimplify //
    PowerExpand
]

```

Figura 24. Comandos CurvaturaGaussiana y CurvaturaMedia

**Comando** `CurvaturaGaussiana[exp]`

Devuelve la curvatura gaussiana de una 2 – Superficie.

**Comando** `CurvaturaMedia[exp]`

Devuelve la curvatura media de una 2 – Superficie.

```

In[ ]:= EllipseDeCurvatura[exp_, {a_, b_}] := Module[{centro, a1, a, ellipse, cc},
|módulo
centro = {(F1[[1, 1]] + F1[[2, 2]]) / 2, (F2[[1, 1]] + F2[[2, 2]]) / 2};
a[t_] :=
{centro[[1]] + (F1[[1, 1]] - F1[[2, 2]]) Cos[2 t] / 2 + F1[[2, 2]] Sin[2 t],
|coseno |seno
centro[[2]] + (F2[[1, 1]] - F2[[2, 2]]) Cos[2 t] / 2 + F2[[2, 2]] Sin[2 t]} // Simplify //
|coseno |seno |simplifica
PowerExpand;
|expande potencias
a1[t] = a[t] /. {u -> a, v -> b};
cc = centro /. {u -> a, v -> b};
ellipse = ParametricPlot[a1[t] // Evaluate, {t, 0, π}, PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}];
|gráfico paramétrico |evalúa |rango de representación
Show[ellipse, Graphics[{PointSize[0.02], Red, Point[cc]}]]
|muestra |gráfico |tamaño de punto |rojo |punto
]

```

Figura 25. Comando EllipseDeCurvatura

**Comando** `EllipseDeCurvatura[exp, {a, b}]`

Devuelve la Elipse de curvatura de una 2 – Superficie en un punto  $p$ .

```

In[ ]:= FamiliaDeElipses[x_, {a_, b_}] := Module[{centro, centros, elipses},
|módulo
centro = {(F1[[1, 1]] + F1[[2, 2]]) / 2, (F2[[1, 1]] + F2[[2, 2]]) / 2};
centros = Table[centro /. {u -> i, v -> π}, {i, 0, 2 π, π / 8}];
|tabla
a[t_] :=
{centro[[1]] + (F1[[1, 1]] - F1[[2, 2]]) Cos[2 t] / 2 + F1[[2, 2]] Sin[2 t],
|coseno |seno
centro[[2]] + (F2[[1, 1]] - F2[[2, 2]]) Cos[2 t] / 2 + F2[[2, 2]] Sin[2 t]} // Simplify //
|coseno |seno |simplifica
PowerExpand;
|expande potencias
elipses = ParametricPlot[Table[a[t] /. {u -> i, v -> π}, {i, 0, 2 π, π / 8}] // Evaluate,
|gráfico paramétrico |tabla |evalúa
{t, 0, π}, PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}];
|rango de representación
Show[elipses, Graphics[{PointSize[0.02], Red, Point[centros]}]]
|muestra |gráfico |tamaño de punto |rojo |punto
,

```

Figura 26. Comando FamiliaDeElipses

**Comando** `FamiliaDeElipses[exp, {a, b}]`

Devuelve una familia de Elipses de curvatura, para varios puntos de una 2 – Superficie en un punto  $p$ .

Ahora, se presentan una serie de ejemplos que muestran el uso de los comandos descritos arriba.

## 4.5.2. Uso de los comandos para determinar la curvatura de una 2-superficie

### Ejemplo1: Esfera

## Esferas

```
In[ ]:= esfera =
      r { Cos[u] Sin[v], Sin[u] Sin[v], Cos[v], 0}.
      |coseno |seno |seno |seno |coseno
      Orthogonalize[{ {1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, -1}, {1, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}}];
      |ortogonaliza

In[ ]:= esfera // Simplify // PowerExpand
      |simplifica |expande potencias

Out[ ]:= { -\frac{1}{2} r (Cos[v] + \sqrt{2} Cos[u] Sin[v]), \frac{1}{2} r (Cos[v] + \sqrt{2} Sin[u] Sin[v]),
          -\frac{1}{2} r (Cos[v] - \sqrt{2} Cos[u] Sin[v]), \frac{1}{2} r (Cos[v] - \sqrt{2} Sin[u] Sin[v]) }
```

Figura 27. Esfera en  $E^4$

## Vectores unitarios

```
In[ ]:= VectoresNormales[esfera];
In[ ]:= Normal1

Out[ ]:= { -\frac{Cos[u] (\sqrt{2} Cos[v] + (Cos[u] - Sin[u]) Sin[v])}{\sqrt{3 - Sin[2u] + Cos[2v] (1 + Sin[2u])}}, \frac{Sin[u] (\sqrt{2} Cos[v] + (-Cos[u] + Sin[u]) Sin[v])}{\sqrt{3 - Sin[2u] + Cos[2v] (1 + Sin[2u])}},
          \frac{Cos[u] (\sqrt{2} Cos[v] + (-Cos[u] + Sin[u]) Sin[v])}{\sqrt{3 - Sin[2u] + Cos[2v] (1 + Sin[2u])}}, \frac{Sin[u] (\sqrt{2} Cos[v] + (Cos[u] - Sin[u]) Sin[v])}{\sqrt{3 - Sin[2u] + Cos[2v] (1 + Sin[2u])}} }

In[ ]:= Normal2

Out[ ]:= { \left( -\frac{1}{2} (3 + Cos[2v]) Sin[u]^3 + Cos[u]^3 Sin[v]^2 + Cos[u] Sin[u] Sin[v] (-\sqrt{2} Cos[v] + Sin[u] Sin[v]) - \right.
          Cos[u]^2 (2 Cos[v]^2 Sin[u] + \sqrt{2} Cos[v] Sin[v] + Sin[u] Sin[v]^2) \Big) / (\sqrt{6 - 2 Sin[2u] + 2 Cos[2v] (1 + Sin[2u])}),
          - \left( (\sqrt{2} Cos[u] (3 + Cos[2v]) - 2 Cos[u]^2 Cos[v] Sin[v] - 2 \sqrt{2} Sin[u] Sin[v]^2 + Sin[u]^2 Sin[2v] + (1 + Sin[2u]) Sin[2v]) / \right.
          (4 \sqrt{3 - Sin[2u] + Cos[2v] (1 + Sin[2u])}) \Big),
          - \left( \left( -\frac{1}{2} (3 + Cos[2v]) Sin[u]^3 + Cos[u]^3 Sin[v]^2 + Cos[u] Sin[u] Sin[v] (\sqrt{2} Cos[v] + Sin[u] Sin[v]) + \right. \right.
          Cos[u]^2 (-2 Cos[v]^2 Sin[u] + \sqrt{2} Cos[v] Sin[v] - Sin[u] Sin[v]^2) \Big) / (\sqrt{6 - 2 Sin[2u] + 2 Cos[2v] (1 + Sin[2u])}) \Big),
          \left( -2 Cos[u] (3 + Cos[2v]) - 3 \sqrt{2} Cos[u]^2 Cos[v] Sin[v] - \frac{(-7 + Cos[2u]) Cos[v] Sin[v]}{\sqrt{2}} + 4 Sin[u] Sin[v]^2 + \sqrt{2} Sin[2u] Sin[2v] \right) / \sqrt{2} \Big)
```

Figura 28. Vectores Unitarios de la esfera en  $E^4$

## Formas Fundamentales

In[ ]:= `FormasFundamentales[esfera]`

Out[ ]:=  $\{r^4 \sin[v]^2, r^2 \sin[v]^2\}$

### Primera Forma Fundamental

In[ ]:= `FormaFundamental1`

Out[ ]:=  $r^4 \sin[v]^2$

### Segunda Forma Fundamental

In[ ]:= `FormaFundamental2`

Out[ ]:=  $r^2 \sin[v]^2$

### Curvatura Gaussiana

In[ ]:= `CurvaturaGaussiana[esfera]`

Out[ ]:=  $\frac{1}{r^2}$

### Curvatura media

In[ ]:= `CurvaturaMedia[esfera]`

Out[ ]:= 
$$\frac{2\sqrt{2} (\cos[u] (1 + \cos[v]) + (-1 + \cos[v]) \sin[u])}{r \sqrt{3 + \cos[2v] - 2 \sin[2u] \sin[v]^2}}$$

Figura 29. Formas fundamentales de la esfera en  $E^4$

### Elipse de Curvatura de la Esfera

In[ ]:= `r = 1;`

`ElipseDeCurvatura[esfera, {0,  $\pi/4$ }]`

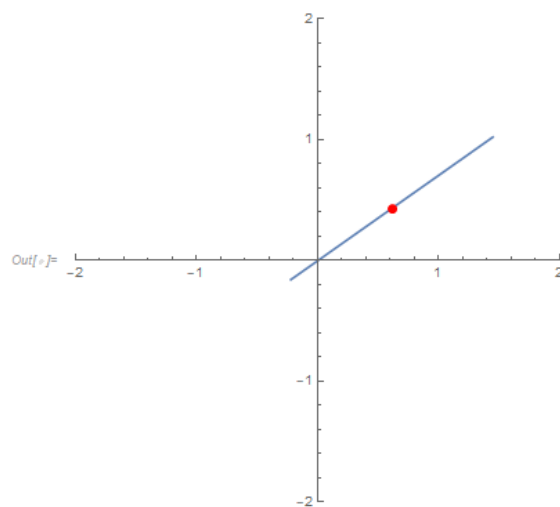
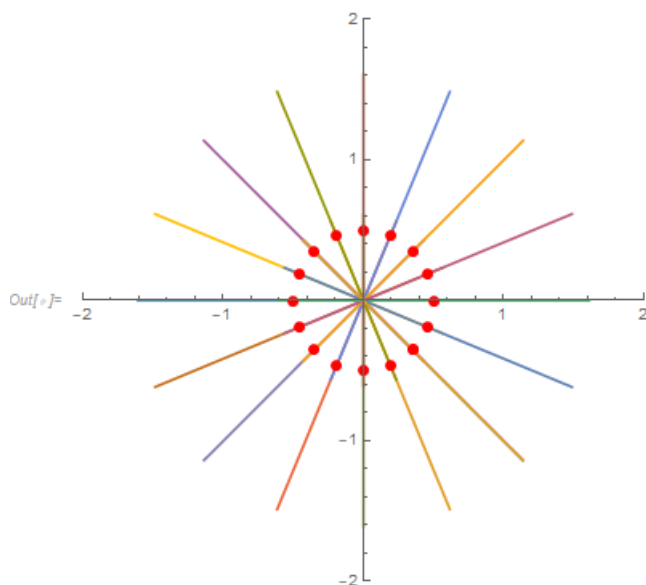


Figura 30. Elipse de curvatura de la esfera en  $E^4$

### Familia de Elipses y sus respectivos centros

In[ ]:= FamiliaDeElipses[x, {0, π}]



Dado que la Elipse de Curvatura de la esfera  $S$ , degenera en un segmento de recta, que pasa por el punto  $P$ , en nuestro caso es el origen de coordenadas.

Por otro lado, la curvatura gaussiana es  $k = \frac{1}{r^2}$ , diferente de cero

Luego, se concluye que la superficie  $S$  esta contenida en algún hiperplano de  $E^4$ .

Esto es su espacio ambiente es tridimensional, como es sabido.

Figura 31. Familia de elipses de la esfera en  $E^4$

## Ejemplo 2: Toro Plano

### Toro Plano

```
In[ ]:= Clear[r];  
|borra  
  
In[ ]:= toro := r { Cos[u], Sin[u], Cos[v], Sin[v] }  
|coseno |seno |coseno |seno  
  
In[ ]:= toro // Simplify // PowerExpand  
|simplifica |expande potencias  
  
Out[ ]:= { r Cos[u], r Sin[u], r Cos[v], r Sin[v] }
```

Primeras y segundas derivadas [»](#)

### Vectores unitarios

```
In[ ]:= VectoresNormales[toro]  
  
Out[ ]:= { { -Cos[u], -Sin[u], 0, 0 }, { 0, 0, Cos[v], Sin[v] } }  
  
In[ ]:= Normal1  
  
Out[ ]:= { -Cos[u], -Sin[u], 0, 0 }  
  
In[ ]:= Normal2  
  
Out[ ]:= { 0, 0, Cos[v], Sin[v] }
```

Figura 32. Toro Plano

### Formas Fundamentales

```
In[ ]:= FormasFundamentales[toro]  
  
Out[ ]:= { r^4, 0 }
```

#### Primera Forma Fundamental

```
In[ ]:= FormaFundamental1  
  
Out[ ]:= r^4
```

#### Segunda Forma Fundamental

```
In[ ]:= FormaFundamental2  
  
Out[ ]:= 0
```

#### Curvatura Gaussiana

```
In[ ]:= CurvaturaGaussina[toro]  
  
Out[ ]:= 0
```

La curvatura Gaussiana del Toro plano o Toro de Clifford es cero.

#### Curvatura media

```
In[ ]:= CurvaturaMedia[Toro]  
  
Out[ ]:= 0
```

Figura 33. Formas fundamentales y curvatura gaussiana del toro plano



### Observación

- Aun cuando la curvatura media del Toro plano es cero, no es una superficie mínima. Para que sea mínima, su vector de curvatura media debe ser cero.
- La curvatura Media no es un invariante geométrico en  $E^4$ . Esto se debe a que el espacio ambiente a cambiado.

En la siguiente captura de pantalla se muestra que el vector de curvatura del toro plano no es cero; por lo tanto, no es una superficie mínima.

### Vector de Curvatura Media

```
In[ ]:= H = (F1[[1, 1]] + F1[[2, 2]]) / 2 Normal1 + (F2[[1, 1]] + F2[[2, 2]]) / 2 Normal2 // Simplify //
```

|simplifica

**PowerExpand**  
|expande potencias

$$\text{Out[ ]} = \left\{ -\frac{1}{2} r \cos[u], -\frac{1}{2} r \sin[u], -\frac{1}{2} r \cos[v], -\frac{1}{2} r \sin[v] \right\}$$

Figura 34. Vector de curvatura media del toro plano

Ahora se muestra la elipse de curvatura normal que genera cada punto del toro plano.

### Elipse de Curvatura del toro

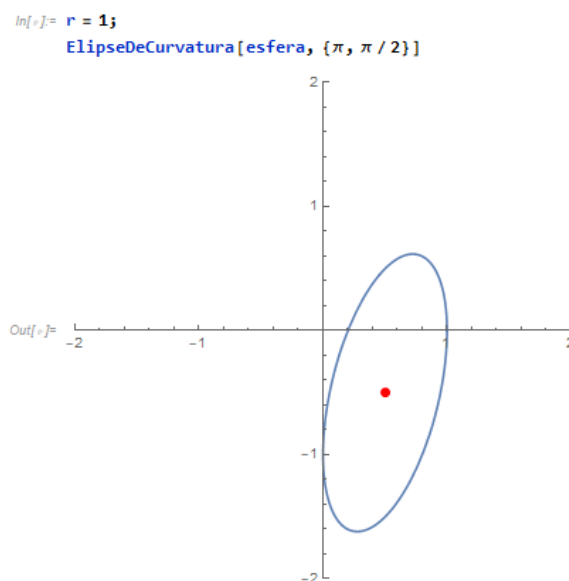


Figura 35. Elipse de curvatura del toro plano

### Familia de elipses

Familia de Elipses y sus respectivos centros

```
In[ ]:= FamiliaDeElipses[toro, {0, 0}]
```

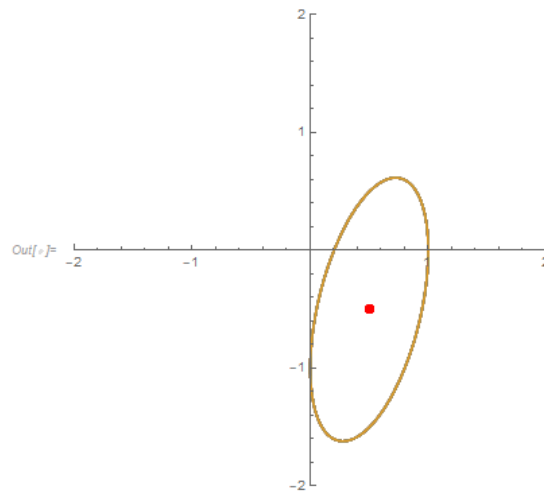


Figura 36. Familia de Elipses de curvatura del toro plano

La familia de elipses muestra que, para cualquier punto del toro plano, la curvatura de elipse es la misma.

## 4.6. Comandos para el cálculo de la curvatura de una hipersuperficie en $E^4$

En esta sección, se muestran los comandos que permiten calcular la curvatura gaussiana, media y seccional de una 3-superficie. Luego se muestran ejemplos ilustrativos que permiten calcular dichas curvaturas sobre algunas 3-superficies particulares.

### 4.6.1. Comandos en Mathematica para calcular la curvatura de una 3-superficie

Se muestra, mediante capturas de pantalla los comandos que permiten calcular la curvatura Gaussiana, Media y Seccional de una 3-superficie en  $E^4$

## 3 - Superficie en $E^4$

### Comandos

```
In[2]:= unit[v_] := v / Sqrt[v.v];  
          |raíz cuadrada  
norm[v_] := Sqrt[v.v];  
          |raíz cuadrada  
J1[{a1_, a2_, a3_, a4_}] := {-a3, -a4, a1, a2}  
  
In[5]:= Ridic[x_, y_] := Module[{n1, n2},  
          |módulo  
    n1 = Length[x];  
          |longitud  
    n2 = Length[y];  
          |longitud  
    Table[Table[x[[i]].y[[j]], {i, 1, n1}], {j, 1, n2}]  
    |tabla |tabla  
  ]  
  
In[6]:= VectorNormal[x_] := Module[{},  
          |módulo  
    x1 = {xu, xv, xw} = {D[x, u], D[x, v], D[x, w]} // Simplify //  
          |deriva |deriva |deriva |simplifica  
    PowerExpand;  
    |expande potencias  
    N1 = unit[Cross[xu, xv, xw]] // Simplify // PowerExpand  
          |producto vectorial |simplifica |expande potencias
```

Figura 37. Comandos Ridic y VectorNormal

**Comando**    `Ridic[x, y]`

Dados los vectores x e y, devuelve una matriz.

**Comando**    `VectorNormal[exp]`

devuelve el vector normal de una 3-superficie

```

In[7]:= PrimeraForma[x_] := Module[{ },
    |módulo
    G = Ridic[x1, x1] // Simplify // PowerExpand;
    |simplifica |expande potencia:
    I1 = Det[G]
    |determinante
    ]

In[8]:= SegundaForma[x_] := Module[{ },
    |módulo
    x2 = {xuu, xuv, xuw, xvv, xvw, xww} =
    {D[x, {u, 2}], D[x, {u, 1}, {v, 1}], D[x, {u, 1}, {w, 1}],
    |deriva |deriva |deriva
    D[x, {v, 2}], D[x, {v, 1}, {w, 1}], D[x, {w, 2}]} // Simplify //
    |deriva |deriva |deriva |simplifica
    PowerExpand;
    |expande potencias
    g =
    {{xuu.N1, xuv.N1, xuw.N1}, {xuv.N1, xvv.N1, xvw.N1},
    {xuw.N1, xvw.N1, xww.N1}} // Simplify // PowerExpand;
    |simplifica |expande potencias
    I2 = Det[g] // Simplify // PowerExpand
    |determinante |simplifica |expande potencias
    ]

In[9]:= OperadorDeForma[x_] := Module[{ },
    |módulo
    A = -Inverse[G].g
    |matriz inversa
    ]

```

Figura 38. Comandos PrimeraForma, SegundaForma y OperadorDeForma

**Comando** `PrimeraForma[exp]`

devuelve la Primera Forma Fundamental de una 3-superficie

**Comando** `SegundaForma[exp]`

devuelve la Segunda Forma Fundamental de una 3-superficie

**Comando** `OperadorDeForma[exp]`

devuelve el Operador de forma de una 3-superficie

```

In[10]:= CurvaturaGaussiana[x_] := Module[{ },
      I2 / I1 // Simplify // PowerExpand
    ]
In[11]:= CurvaturaMedia[x_] := Module[{ },
      -Tr[A] / 3 // FullSimplify // PowerExpand
    ]
In[12]:= CurvaturaSeccional[x_] := Module[{ },
      Tr[Minors[A, 2]] / 3 // FullSimplify // PowerExpand
    ]

```

Figura 39. Comandos CurvaturaGaussiana, CurvaturaMedia y CurvaturaSeccional

**Comando** `CurvaturaGaussiana[exp]`

devuelve la Curvatura Gaussiana de una 3-superficie

**Comando** `CurvaturaMedia[exp]`

devuelve la Curvatura Media de una 3-superficie

**Comando** `CurvaturaSeccional[exp]`

devuelve la Curvatura Seccional de una 3-superficie

Ahora, se presentan una serie de ejemplos que muestran el uso de los comandos descritos arriba.

#### 4.6.2. Uso de los comandos para determinar la curvatura de una 3-superficie

##### Ejemplo1: Hiperesfera

## Hiper-Esferas

```
In[13]:= x := r { Cos[u] Sin[v] Sin[w], Sin[u] Sin[v] Sin[w], Cos[v] Sin[w],  
               |coseno |seno |seno |seno |seno |seno |coseno |seno  
               Cos[w] }  
               |coseno
```

```
In[14]:= x // Simplify // PowerExpand  
          |simplifica |expande potencias
```

```
Out[14]= { r Cos[u] Sin[v] Sin[w],  
          r Sin[u] Sin[v] Sin[w], r Cos[v] Sin[w], r Cos[w] }
```

---

## Vector Normal Unitario

```
In[15]:= VectorNormal[x]
```

```
Out[15]= { -Cos[u] Sin[v] Sin[w],  
          -Sin[u] Sin[v] Sin[w], -Cos[v] Sin[w], -Cos[w] }
```

Figura 40. Hiperesfera en  $E^4$

---

## Primera Forma Fundamental

```
In[ ]:= PrimeraForma[x]  
Out[ ]:=  $r^6 \sin[v]^2 \sin[w]^4$ 
```

---

## Segunda Forma Fundamental

```
In[ ]:= SegundaForma[x]  
Out[ ]:=  $r^3 \sin[v]^2 \sin[w]^4$ 
```

---

## Operador de Forma

```
In[ ]:= OperadorDeForma[x] // MatrixForm  
Out[ ]:= 
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

```

Figura 41. Primera y segunda forma fundamental de la hiperesfera

---

## Curvatura Gaussiana

```
In[20]:= CurvaturaGaussiana[x]  
Out[20]=  $\frac{1}{r^3}$ 
```

---

## Curvatura media

```
In[21]:= CurvaturaMedia[x]  
Out[21]=  $\frac{1}{r}$ 
```

---

## Curvatura Seccional Media

```
In[22]:= CurvaturaSeccional[x]  
Out[22]=  $\frac{1}{r^2}$ 
```

Figura 42. Curvaturas de una hiperesfera

## Ejemplo 2: Hipertoro

A continuación, se construye una hiper superficie o 3-superficie, siguiendo la construcción de un toro de revolución. En este caso se toma una esfera de radio  $R$  y se hace rotar alrededor de una circunferencia de radio  $r$ . Lo que se obtiene, es una 3-superficie que bien se podría llamar hipertoro.

## Hiper-Toro

```
In[36]:= toro := { (R + r Cos[u]) Cos[v] Cos[w], (R + r Cos[u]) Cos[v] Sin[w],  
                  Coseno Coseno Coseno Coseno Coseno Seno  
                  (R + r Cos[u]) Sin[v], r Sin[u] }  
                  Coseno Seno Seno  
  
In[37]:= toro // Simplify // PowerExpand  
          simplifica expande potencias  
  
Out[37]:= { (R + r Cos[u]) Cos[v] Cos[w],  
            (R + r Cos[u]) Cos[v] Sin[w], (R + r Cos[u]) Sin[v], r Sin[u] }
```

---

## Vector Normal Unitario

```
In[38]:= VectorNormal[toro]  
  
Out[38]:= { Cos[u] Cos[v] Cos[w], Cos[u] Cos[v] Sin[w],  
            1  
            - Cos[u] Sec[v] Sin[2 v], Sin[u] }
```

Figura 43. Hipertoro de revolución y su vector unitario



## Primera Forma Fundamental

```
In[39]:= PrimeraForma[toro]
```

$$\text{Out[39]}= r^2 (R + r \cos(u))^4 \cos(v)^2$$

plot simplify expand trig reduce more...

## Segunda Forma Fundamental

```
In[40]:= SegundaForma[toro]
```

$$\text{Out[40]}= -r \cos(u)^2 (R + r \cos(u))^2 \cos(v)^2$$

## Operador de Forma

```
In[42]:= OperadorDeForma[toro] // MatrixForm
```

forma de matriz

$$\text{Out[42]//MatrixForm}= \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos(u)}{R + r \cos(u)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos(u)}{R + r \cos(u)} \end{pmatrix}$$

Figura 44. Primera y segunda forma fundamental del hipertoro

## Curvatura Gaussiana

```
In[43]:= CurvaturaGaussiana[toro]
```

$$\text{Out[43]}= -\frac{\cos(u)^2}{r (R + r \cos(u))^2}$$

## Curvatura media

```
In[44]:= CurvaturaMedia[toro]
```

$$\text{Out[44]}= -\frac{1}{r + \frac{2rR}{R + 3r \cos(u)}}$$

## Curvatura Seccional Media

```
In[46]:= CurvaturaSeccional[toro]
```

$$\text{Out[46]}= \frac{\cos(u) (2R + 3r \cos(u))}{3r (R + r \cos(u))^2}$$

Figura 45. Curvaturas del hipertoro

## CONCLUSIONES

1. Una curva en  $E^4$ , posee tres tipos de curvaturas, que se expresan en función de los vectores unitarios de la base móvil de Frenet-Serret (pp. 90 y 96). Si la tercera curvatura  $k_3$  es cero, la curva está contenida en algún hiperplano de  $E^4$
2. La elipse de curvatura normal, permite caracterizar las 2-superficies en el espacio euclidiano cuatridimensional; tales como estar contenida en un hiperplano o contenida en una esfera.
3. Una 3-superficie posee tres curvaturas: curvatura media, curvatura seccional media principal y curvatura gaussiana. Las cuales se definen en función de los términos presentes en la segunda forma fundamental, en analogía a las correspondientes curvaturas de una 2-superficie.
4. Los comandos implementados en el software Mathematica y descritos en las páginas 130-132, permiten simplificar los cálculos y ahorrar tiempo al momento de determinar las curvaturas de una curva, de una 2-superficie y de una 3-superficie en  $E^4$ .

## RECOMENDACIONES

1. Se recomienda el estudio de la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies en  $E^4$ , usando las formas de conexión, como otro tipo de enfoque.
2. Se recomienda el estudio de las estructuras complejas, vistas como  $C^2$ , como superficies en  $E^4$ .
3. Se sugiere ampliar el estudio para espacios euclidianos de mayor dimensión.
4. Se recomienda a las autoridades a la Universidad Nacional de Piura implementar laboratorios de cómputo, con las correspondientes licencias de los softwares; para que estudiantes de la especialidad de Matemática de pre grado y post grado, tengan facilidad en la construcción de programas de cálculo y de gráficos especializados, en sus trabajos de investigación; así mismo para cumplir normas establecidas para la exposición de los resultados de la investigación en eventos académicos nacionales e internacionales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta-Humánez, P. & Aranda, M. (2011). Some remarks on a generalized vector product. Revista Integración Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander Vol. 29, No. 2, 2011, pág. 151–162. Obtenido de:  
<http://www.scielo.org.co/pdf/rein/v29n2/v29n2a05.pdf>

Aguirre, E. (2007). Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Universidad Complutense de Madrid, España. Obtenido de  
<http://www.mat.ucm.es/~edaquirr/cys06.pdf>

Arrieta, C. (2006). Geometría de Superficies. Universidad Distrital Federico José de Caldas, Bogotá, Colombia. Obtenido de:  
<https://comunidad.udistrital.edu.co/cjulio/files/2015/09/Lib-CS.pdf>

Basto-Gonçalves J. (2013). Local Geometry of Surfaces in  $R^4$ . Obtenido de:  
<https://cmup.fc.up.pt/main/sites/default/files/publications/ICCS.pdf>

Cánovas, J. (2010). *Programación con Mathematica*. Cartagena: Universidad Politécnica de Cartagena.

Carmona, C. (2005). *El Programa Mathematica como Herramienta en la Resolución de Problemas y Ejercicios de Matemáticas*. Córdoba: Universidad de Córdoba

Chen, B.-Y. (1973). *Geometry of submanifolds*. New York: Marcel Dekker, Inc. Obtenido de:  
[https://www.researchgate.net/publication/44409023\\_Geometry\\_of\\_submanifolds\\_Marcel\\_Dekker](https://www.researchgate.net/publication/44409023_Geometry_of_submanifolds_Marcel_Dekker)

Do Carmo, M. (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Printece - Hall, New Jersey.

Frenet, F. (1852). Sur les courbes à double courbure. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 437-447.

Ganchev, G., & Milousheva, V. (2012). An invariant theory of surfaces in the four-dimensional euclidian or Minkowski space. Studia Mathematica Bulgarica, 177–200. Obtenido de:  
<http://www.math.bas.bg/pliska/Pliska-21/Pliska-21-2012-177-200.pdf>

Hernandez, M. & Pastor J. (2010). Un curso de geometria diferencial. Consejo superior de investigación científica. Madrid

López, R (2014). Geometria I. Tema 1: Espacios vectoriales. Universidad de Granada. Obtenido de:  
<https://www.ugr.es/~rcamino/docencia/geo1-03/temario.htm>

López, R (2016). Geometria II. Tema 2: Formas bilineales y formas cuadraticas. Universidad de Granada. Obtenido de:  
<https://www.ugr.es/~rcamino/docencia/geometrial15-16/t-tema2.pdf>

Linarez, I. (2009). *Producto cruz en espacios euclídeos*. Ciudad de México: Repositorio Digital. Obtenido de  
<http://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/6014/2/LINAREZ%20GARC%C3%8DA%20%20IGNACIO%20Tesis%202009.pdf>

Manzano J. (2011). Espacios vectoriales euclídeos. Universida Compltense de Madrid. Obtenido de:  
<https://www.ugr.es/~jmmanzano/material/Geo2-Tema3.pdf>

Marmolejo M. (1994), *Vector product over  $R^n$ : The Lagrange's general identity* (Spanish), Matemáticas enseñanza universitaria, 3 (1994), 109–117.

Monge, G. (1795). *Géométrie descriptive. Leçons données aux écoles normales*. París: Baudouin.

O'Neill, B. (1972). *Elementos de geometría diferencial*. México: Limusa-Wiley.

Otsuky T (1966). Surfaces in the 4-Dimensional Euclidean Space Isometric to a Sphere. Kodai Math. Sem. Rep., Volume 18, Number 2 (1966), 101-115. Obtenido de:  
[https://projecteuclid.org/download/pdf\\_1/euclid.kmj/1138845191](https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.kmj/1138845191)

Otsuky T & Shiohama K (1967). A Theory of Ruled Surfaces in  $E^4$ . Kodai Math. Sem. Rep., Volume 19, Number 3 (1967), 370-380. Obtenido de:

[https://projecteuclid.org/download/pdf\\_1/euclid.kmj/1138845442](https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.kmj/1138845442)

Solanilla, L Barrero E, Vargas T. (2006) Teorema Egregio en Hipersuperficien en  $R^4$ . Ibagué, Colombia. Revista Tumbaga, 81–88. Obtenido de:

<http://revistas.ut.edu.co/index.php/tumbaga/article/view/113>

Vas de Almeida, R (2011). Estimadores de Curvaturas para Curvas no  $R^4$ . Rio de Janeiro. Repositorio Digital. Obtenido de:

[https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/21598/21598\\_1.PDF](https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/21598/21598_1.PDF)

# ANEXOS

## ANEXO 1. MATRIZ DE CONSISTENCIA

<b>TÍTULO:</b> Implementación de comandos para el cálculo de la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies en el Espacio Euclidiano cuatridimensional mediante el software Mathematica			
<b>Problema</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Hipótesis</b>	<b>Variables</b>
<p><b>Problema general:</b></p> <p>Los Cursos de Geometría Diferencial impartidos en pre-grado, se basan en el estudio de Curvas y Superficies en el espacio euclidiano tridimensional, dejando de lado el estudio de Curvas y Superficies de mayor dimensión, por no ser un objetivo de los cursos impartidos. De este modo, queda como problema abierto el estudio de la Geometría Diferencial de Curvas y Superficies en el espacio euclidiano cuatri-dimensional en donde los cálculos se hacen engorrosos por lo que se requiere aplicar el uso del software Mathematica.</p> <p><b>Formulación:</b></p> <p>¿Cómo implementar comandos para calcular la curvatura de una curva y de una superficie en el espacio euclidiano cuatridimensional?</p>	<p><b>Objetivo general:</b></p> <p>Implementar comandos para el cálculo de la curvatura de curvas, superficies e hipersuperficies en el espacio euclidiano cuatridimensional mediante el Software Mathematica.</p> <p><b>Objetivos específicos:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Determinar las curvaturas de una curva en <math>E^4</math>.</li> <li>2. Determinar la curvatura seccional Gaussiana de una Superficie en <math>E^4</math>.</li> <li>3. Determinar la Curvatura Gaussiana de una Hiper superficie en <math>E^4</math>.</li> <li>4. Implementar comandos para el cálculo de las curvaturas de una curva en <math>E^4</math></li> <li>5. Implementar comandos para el cálculo de la Curvatura Gaussiana de una Hipersuperficie en <math>E^4</math></li> </ol>	<p>Es posible</p> <p>Implementar comandos para el cálculo de la curvatura de curvas y superficies en el espacio euclidiano cuatridimensional mediante el uso del Software Mathematica y previo a la formulación de ecuaciones que generen el valor de la curvatura.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Curvatura de curvas</li> <li>• Curvatura de superficies</li> <li>• Curvatura de hipersuperficies</li> </ul>